

E U C L I D E S

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

nr **4**

februari 2012

Videoconferencing

**Delen van veeltermen
deel 2**

**Lesson Study
deel 2**

Europa ontdekken

Vaknetwerken

Oproep



Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

jaargang 87

nr 4

februari
2012

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Michel van Ast

Rob Bosch

Dick Klingens, eindredacteur

Wim Laaper, secretaris

Ernst Lambeck

Marjanne de Nijs, hoofdredacteur

Joke Verbeek

Heiner Wind, voorzitter

Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de

hoofdredacteur: Marjanne de Nijs,

Opaal 4, 2719 SR Zoetermeer

E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.

Zie voor nadere aanwijzingen:

www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,

Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk

Tel. (070) 390 70 04

E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,

Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem

Tel. (026) 381 36 46

E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bommel-Hendriks,

De Schalm 19, 8251 LB Dronten

Tel. (0321) 31 25 43

E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,

Postbus 405, 4100 AK Culemborg

Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.

De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor

- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WvF (jaarlijks): € 2,50

Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.

Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.

Personen (niet-leden van de NVvW): € 65,00

Instituten en scholen: € 145,00

Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00

Betaling per acceptgiro.

Advertenties en bijsluiters

De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.

t.a.v. E. van Dijk

Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal

Tel. (0318) 555 075

E-mail: e.vandijk@dekleuver.nl

KORT VOORAF

[Marjanne de Nijs]

Verenigingsdag

Op 5 november j.l. scheen de zon uitbundig en reisden veel collega's af naar Veenendaal voor de NVvW-jaarvergadering/studiedag. In nummer 3 kon u al terugkijken op de aftrap van deze dag met de jaarrede van onze voorzitter, Marian Kollenveld. Nu komen we er met bijdragen van enkele collega's nogmaals op terug. Geniet van het fotoverslag en doe uw voordeel met de impressies van een aantal workshops.

Op deze dag was op de jaarmarkt het ellipsbiljart te bewonderen; Pauline Vos schrijft er over. De leskist is eenvoudig te reserveren via internet. Ook de andere lespakketten, op de door haar genoemde site, zijn een aanrader. Op de foto bij haar artikel staan – rond het biljart – louter jongedames. Wiskunde en vrouwen – het is niet altijd een vanzelfsprekende combinatie geweest. Harm Jan Smid mijmert er over in Het Geheugen.

Bent u op die dag ook Ton Lecluse tegen het lijf gelopen? Als vanouds deelde hij een meetkunde-opgave uit met de vraag om een uitwerking ervan op te sturen. Velen van u hebben daaraan gehoor gegeven. We hopen in een volgende nummer het resultaat te publiceren; deze keer nog even een 'gewone' opgave vanuit de oude doos. Ook als vanouds in deze *Euclides* een bijdrage van Frans Ballering. En Gerard Koolstra komt nog een keer terug op het delen van veeltermen, nu met aandacht voor de methode van Horner.

Denkactiviteiten

Het (28 : 4)-incident uit mijn kort vooraf in nummer 2 lijkt een eigen leven te leiden. Enige weken geleden gaf ik een toetsje terug aan mijn eindexamenleerlingen. Er waren 36 punten te behalen en op de vraag van de leerlingen: 'Hoe bereken ik mijn cijfer', was mijn antwoord dan ook eenvoudig: 'Score delen door vier en er één bij optellen'. Vanuit mijn ooghoek zag ik een leerling, met een score van 28, reiken naar zijn grafische rekenmachine. Ik was net iets sneller en met zijn GR in mijn hand vroeg ik wat 28 : 4 oplevert. Het antwoord kwam met de verontschuldiging: 'Ja maar mevrouw, dan moet ik weer zó nadenken, met de rekenmachine gaat het sneller.'

Die onwil om na te denken hield me nog een tijdje bezig. Bij de komende wijzigingen van het examenprogramma havo/vwo in 2015 krijgen 'denkactiviteiten' veel aandacht. Het staat daarom volop in de belangstelling. Gelukkig maar, want het is mijns inziens een belangrijk onderdeel van ons wiskundeonderwijs. Om met Aristophanes te spreken: 'Onderwijs is geen kruiken vullen maar een haard doen branden.' Denkactiviteiten zoals bijvoorbeeld Nellie Verhoef in haar 'Lesson Study' beschrijft, zijn essentieel om het vuurtje op te stoken. Over nadenken gesproken: u kent vast het verjaardags- en driedeurenprobleem. Intuïtieve oplossingen voor deze vraagstukken zijn niet altijd correct. Rob Bosch schrijft over een dilemma waar de kansrekening een grote rol speelt: een duel voor drie met een verrassende ontknopning. Kan dit ook in de klas als denkactiviteit?

Vaknetwerken

In de rubriek 'Van de bestuurstafel' schrijft Douwe van der Kooi over het nut van vaknetwerken en geeft een inventarisatie van de netwerken die actief zijn. Twee ervan komt u in deze *Euclides* tegen. Als gezegd, Nellie Verhoef in haar tweede deel over 'Lesson Study', en daarnaast laat Gerard Jeurnink samen met Monique Böhm zien wat de mogelijkheden zijn met 'videoconferencing'. Ze zijn niet de enigen die experimenteren met de 'nieuwe' technologie. Floor Nusink en Erik Atsma beschrijven hun wiskundeproject dat, middels *eTwinning*, leerlingen uit diverse landen aan elkaar koppelt.

En bent u ook niet zo gelukkig met de golf van smartphones die de leerlingen overspoelt? Laurant van Oers laat zien hoe we dit onvermijdelijke gadget in de klas kunnen gebruiken voor educatieve doeleinden. Ik wens u veel leesplezier.

Door het bestuur en de redactie is met leedwezen kennisgenomen van het overlijden van Bram Lagerwerf op 11 december 2011. We zijn hem dankbaar voor hetgeen hij voor het wiskundeonderwijs heeft betekend en zullen daaraan in ons volgende nummer op gepaste wijze aandacht besteden.

INHOUD

137	Kort Vooraf [Marjanne de Nijs]
138	Oproep aan jou! [Rob Bosch]
139	Wiskundeles via videoconferencing [Monique Böhm, Gerard Jeurnink]
142	Delen van veeltermen, deel 2 [Gerard Koolstra]
144	Lesson Study, deel 2 [Nellie Verhoef]
146	Mededeling / cTWO Wiskunde C-conferentie
148	Met wiskunde Europa ontdekken [Floor Nusink, Erik Atsma]
152	Niet geschoten is altijd mis? ! [Rob Bosch]
156	Biljarten op een ellips [Pauline Vos]
157	WisSter en Smartphone [Laurant van Oers]
159	Errata <i>Euclides</i> 87(3)
160	Het oplossen van lineaire vergelijkingen [Ellen Vroegindewei, Frans Ballering]
161	Vanuit de oude doos [Ton Lecluse]
163	Het Geheugen [Ham Jan Smid]
168	Boekbespreking / Conquest of the Plane [Jeroen Spandaw]
171	Boekbespreking / Professor Stewart's verzameling [Chris van der Heijden]
174	Impressies van de NVvW-dag 2011 [Gerrit Roorda, Ernst Lambeck e.v.a.]
180	Vaknetwerken [Douwe van der Kooi]
182	Recreatie [Sieb Kemme]
184	Servicepagina

Oproep aan jou!

STUDENT(E) AAN DE LERARENOPLEIDING WISKUNDE



[Rob Bosch, namens de redactie van Euclides]

Om maar meteen met de deur in huis te vallen... De redactie van *Euclides*, het vaktijdschrift voor (toekomstige) wiskundeleraren, is op zoek naar een enthousiaste student(e) aan één van de lerarenopleidingen wiskunde.

Waarom zijn we op zoek naar jou? Wel, de redactie van *Euclides* bestaat uit een aantal ervaren wiskundedocenten en zij zouden graag een toekomstig wiskundedocent(e) aan hun team willen toevoegen.

Voor we verder gaan, eerst even iets over het tijdschrift – wellicht overbodig, maar toch. *Euclides* is het tijdschrift van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW). In het blad vind je een agenda en besprekingen van alle activiteiten op het gebied van het wiskundeonderwijs (congressen, symposia, wiskundedagen, cursussen enz.). In het tijdschrift wordt ook veel aandacht besteed aan de didactiek van de wiskunde. Tevens vind je allerlei aardige stukjes over de wiskunde zelf. Deze artikelen kunnen door de wiskundeleraren vaak in de les gebruikt worden. Verder vind je in het blad verslagen van bijeenkomsten en interviews met mensen die bij het wiskundeonderwijs betrokken zijn. Als je zelf wilt zien wat het blad te bieden heeft, dan kun je de site van de NVvW bezoeken (www.nvvw.nl), maar ongetwijfeld is er op jouw instituut wel een exemplaar van *Euclides* te vinden.

Als je lid wordt van onze redactie, als *volwaardig* redactielid, kun je vanuit je eigen ideeën invulling geven aan dat redactielidmaatschap. Je kunt bijvoorbeeld een symposium, wiskundedag of lezing bezoeken en daarvan verslag doen in het blad. Je kunt ook, eventueel samen met een van je opleiders, een stukje schrijven over de opleiding die je volgt. Als je enthousiast bent over een bepaald wiskundeboek, kun je daarvan een boekbespreking schrijven. Je kunt op redactievergaderingen je eigen visie geven op hoe het blad er in de toekomst uit zou moeten zien. Je kunt ook op het internet gaan zoeken naar interessante wiskundesites en daar verslag van doen in het blad. Je kunt ... Het bovenstaande is taalkundig niet zo fraai, want ieder zin begint met 'je'.

Maar hierdoor wordt wel duidelijk dat jij én het schitterende vak dat je gekozen hebt, de inspiratiebronnen kunnen zijn van waaruit je invulling geeft aan het lidmaatschap van de redactie.

Als je lid wordt van de redactie, dan overleggen we samen met de opleiders van je opleiding hoe dat lidmaatschap van de redactie kan worden ingepast in je studie. Wellicht telt het als een project of krijg je er een paar studiepunten voor. Uiteraard krijg je ondersteuning van één of meer redactieleden.

Hoe denk je dat de opgedane redactionele vaardigheid bij *Euclides* op je CV zal staan als je gaat solliciteren?

De redactie van *Euclides* vergadert (ten minste) drie maal per jaar in Utrecht. Na de

vergadering gaan we vaak lunchen en soms dineren – heel gezellig, maar dat laatste mag natuurlijk niet je motivatie zijn om bij ons aan te schuiven.

Oké, onze vraag is duidelijk. Nu jouw reactie nog!

Het budget van de redactie laat geen spotje op de TV toe, maar hadden we daar het geld voor, dan zou het overeenkomst vertonen met een spotje van een energiemaatschappij: Wij zeggen... Doen!

Als je over deze oproep nog vragen hebt of als je meteen wilt reageren (dat kunnen we ons wel voorstellen, want het werk is heel leuk), dan kun je contact op nemen met onze hoofdredacteur: Marjanne de Nijs.

Tot op onze volgende redactievergadering?



BEVOEGDHEID TE GRAAD HALEN?

Bij Hogeschool Utrecht kunt u doorstuderen voor een Master of Education voor de vakken aardrijkskunde, biologie, Duits, Engels, Frans, Nederlands, natuurkunde en wiskunde.

Kom naar een van de open dagen of kijk op www.ca.hu.nl > masters voor meer informatie.

ER VALT NOG GENOEG TE LEREN

INSTITUUT
ARCHIMEDES
HOGESCHOOL
UTRECHT



Wiskundeles via videoconferencing

[Monique Böhm en Gerard Jeurnink]

In de regio Twente hebben het afgelopen schooljaar zeven scholen wiskunde D in pilot-modules via videoconferencing gedoceerd. Het betrof de modules 'discrete dynamische systemen' en 'ruimte meetkunde' uit het programma wiskunde D. Monique Böhm en Gerard Jeurnink doen verslag van hun ervaringen met deze pilots.

Inleiding

Met het project *Twente's got Talent* (TgT) is de Universiteit Twente in het wiskunde D-gat gesprongen dat dreigde te ontstaan door de geringe belangstelling voor het vak. Wiskunde D is sinds 2007 een profielkeuzevak voor N&T-leerlingen van havo en vwo; het vak is voor geen enkele vervolgstudie een instroomeis. Toch biedt het een uitgelezen kans om leerlingen enthousiast te maken voor een technische studie. Het door de provincie Overijssel gesubsidieerde project TgT beoogt bètavakken te promoten door netwerkvorming van docenten en middels ict-innovaties het bèta-aanbod uit te breiden.

Daarenboven stelde het door het ministerie van OCW gesubsidieerde project IIO (Innovatie Impuls Onderwijs) scholen in de gelegenheid om geavanceerde apparatuur aan te schaffen waarmee uitvoering kan worden gegeven aan *videoconferencing* (VC) met gekoppelde digiborden.

De universiteit vormde met vier scholen uit Almelo/Hengelo en drie scholen uit Enschede twee netwerkclusters en begeleidde de uitvoering van videoconferencing. Dit jaar lag het accent nog op de organisatorische uitdagingen en de inzet van ict-hulpmiddelen.

Docent Ontwikkel Team

De keuze van de modules en de wijze van uitvoering via videoverbindingen wordt door de docenten onderling afgesproken in een zogeheten DOT, een docent-ontwikkelteam. Maandelijks kwam de groep van docenten, aangevuld met medewerkers van de lerarenopleiding, bijeen op de universiteit. Deels via projectgelden werden de docenten voor 60 uren door de school gefaciliteerd om actief deel te nemen aan dit team. Voor de DOT wiskunde D betekende het

naast lesontwerp ook instructie in 'lesgeven op afstand' en het leren kennen van de vele mogelijkheden van het (*shared*) digibord. De DOT-docenten zagen in de domeinen Dynamische modellen en Meetkunde de beste ict-mogelijkheden voor de wiskundeles in het startjaar. Bij het eerste onderwerp wilden zij webgrafieken in beeld brengen; bij de meetkunde zette men vele applets in. Het team ontwikkelde op beide domeinen een introductieles op de universiteit ter kennismaking voor alle leerlingen (*zie foto 1*). Daarna volgde op de scholen een lessenserie van vier weken met in elke week een uur video-'hoorcollege' en een uur zelfstandig 'werkcollege'.



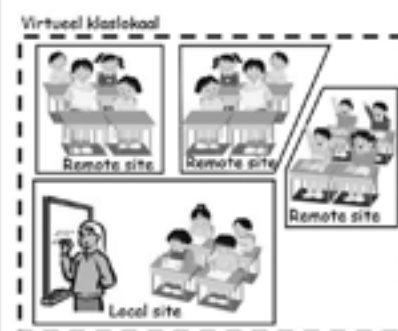
foto 1

Het gezamenlijk uitvoeren van een videoles vraagt om organisatorisch overleg tussen de verschillende scholen. Dit aspect mag niet onderschat worden: elke school hanteert haar eigen lestijden, elke school heeft een wiskundemethode en elke school kent haar eigen PTA. Vervolgens is het eerste leerjaar wiskunde D soms de vierde klas (in havo, in vwo of gecombineerd) en soms de vijfde klas. Het rooster kent soms 2 uren per week,

maar ook 3 uren. Gelukkig geeft wiskunde D wel enige ruimte om hiermee soepel om te gaan. Wij spraken af dat de videoles op dinsdagmiddag tussen 14:00u en 15:00u ingeroosterd moest zijn. Verder werden de drie Enschedese scholen geclusterd naast het tweede cluster van vier scholen uit Almelo/Hengelo.

Architectuur

De deelnemende schoollocaties vormen zoals gezegd met elkaar een cluster. Per cluster wordt tijdens een VC-les gebruik gemaakt van één virtueel klaslokaal. Locaties melden zich bij dit virtuele klaslokaal aan door in te bellen. Het is ook mogelijk om vooraf digitaal een afspraak te programmeren met alle deelnemers, zodat die automatisch gebeld worden.



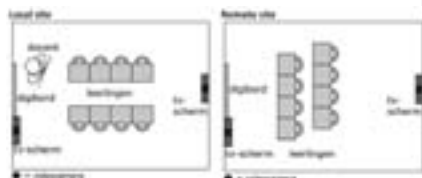
figuur 1 Virtueel klaslokaal (en remote sites)

De manier waarop de architectuur logisch gezien is opgezet, wordt weergegeven in *figuur 1*.

De 'Local site' is de schoollocatie waar de *Video-Live-Docent* (VLD) met leerlingen aanwezig is.

De 'Remote sites' zijn de schoollocaties waar alleen de leerlingen (en eventueel

begeleiding) in het lokaal aanwezig zijn. Deze leerlingen volgen de les via de VC-set. Het digibord van de Local site wordt daarbij gedeeld met de Remote sites. De opstelling in het klaslokaal op de Local site kan afwijken van de opstelling op een Remote site. Op de Local site moet de VLD namelijk zowel zicht hebben op zijn eigen leerlingen als op de leerlingen op de Remote sites. Daarnaast is gebleken dat de leerlingen op de Local site ook af en toe de leerlingen op de Remote sites in beeld willen zien. Dat heeft geleid tot de volgende twee opstellingen in de klaslokalen; *zie figuur 2*.



figuur 2 Opstelling local site en remote site

De VLD heeft in de opstelling van de Local site alle leerlingen in beeld: hij/zij heeft de Remote sites ook op het tv-scherm achter in de klas in beeld. De eigen leerlingen kunnen door de opstelling zowel het digibord als de leerlingen van de Remote sites zien. De leerlingen op de Remote sites kunnen alles volgen wat op het digibord wordt gepresenteerd, ook 'live' geschreven onderdelen. Het tv-scherm achter in de klas wordt niet gebruikt.

Er kunnen meerdere cameraposities vooraf ingesteld worden; bijvoorbeeld:

- 'docent': camerapositie van de camera achterin de klas waarmee de docent gefilmd wordt;
- 'klas': camerapositie van de camera voorin de klas waarmee de leerlingen gefilmd worden.

Met deze cameraposities hoeft de docent eigenlijk de videocamera's tijdens de les niet te bedienen.

De VC-lessen

Bij de start van een VC-les zorgt een medewerker van de school voor het opstarten van de apparatuur en eventueel klaarzetten van de tafelopstelling. Tijdens de pilots is dat in de meeste gevallen de deelnemende docent geweest, maar het kan ook een ict-medewerker of onderwijs-

assistent zijn. Tijdens de pilots dit eerste jaar zijn de docenten over het algemeen in het lokaal gebleven.

Bij binnenkomst in de lokalen nemen de leerlingen hun plaatsen in. In het begin wilden de meeste leerlingen niet graag in beeld zijn. Later is daar wel wat gewenning opgetreden.

Zodra alle locaties in het virtuele klaslokaal zijn 'ingebeld', kan de VC-les beginnen. De VLD heet elk van de locaties van harte welkom en de les kan beginnen (*zie foto 2*). Hij/zij maakt gebruik van het digibord om stof te presenteren en om aantekeningen op te schrijven.



foto 2

Hoewel nog niet uitbundig, is tijdens de VC-lessen geprobeerd om de leerlingen tussendoor vragen te (laten) stellen. De docent heeft daarvoor de namen van de leerlingen op de andere locaties beschikbaar. Naast de VC-les werd op iedere locatie verderop in het weekrooster een 'werkcollege' gepland. Dit werkcollege werd zonder videoconferencing gegeven door de eigen docent op de eigen locatie. Hierbij was ruimte voor extra uitleg en begeleiding bij het maken van het huiswerk. De leerlingen waren in zo'n les vooral zelf aan het werk. Ook het werkcollege kan eventueel via videoconferencing uitgevoerd worden; dan is er ook in zo'n les op slechts één locatie een gekwalificeerde docent nodig.

Veranderde werkwijze docenten

VC-lessen zorgen voor een verandering in werken voor de docenten die een VC-les geven.

- De docent moet voor een camera kunnen lesgeven. Hij/zij moet duidelijk en rustig kunnen praten. Lesgeven voor een camera is spannend en je moet eraan wennen! Daarom hebben de deelnemende docenten een camera-training gevolgd (*zie foto 3*).



foto 3

- De docent moet strikte regels (de VC-etiquette) afspreken met de leerlingen over de manier van communiceren; bijvoorbeeld, een Remote site moet eerst laten zien dat er een vraag is. Ruis werkt zeer verstorend. Bij het stellen van vragen aan leerlingen is het handig als de docent daarbij ook de locatie noemt waar de leerling zit.
- De docent moet alle locaties goed in de gaten blijven houden en laten merken dat hij de leerlingen hoort en ziet. Dit is lastiger op afstand. Leerlingen kunnen snel de indruk krijgen dat er niet op hen wordt gelet, vooral als een opgestoken vinger niet opgemerkt wordt. Een kort onderonsje met een leerling is met de Remote sites bijna niet mogelijk.
- De docent moet werken met een digitaal schoolbord. Daarop wordt de lesstof die behandeld moet worden, gepresenteerd. Het gebruik van een *whiteboard* is ongewenst: de aantekeningen daarop zijn op de Remote sites niet duidelijk te zien. De docent zal dus ict-vaardiger moeten zijn/worden dan bij een gewone les met schoolbord.
- De voorbereiding per les is veelal uitgebreider dan voor een gewone les: in een VC-les kan communicatie tussen locaties vertraging opleveren. Deze vertraging kan ingelopen worden door veel voorbereiding in bijvoorbeeld een presentatie of voorbereide aantekeningen, zodat niet al te veel geschreven hoeft te worden. Let wel: aanwijzen op een digibord komt slecht over op de Remote sites omdat de leerlingen op het tv-scherm wel zien dat de docent op het digibord iets aanwijst, maar niet wát. Ook aanwijzen moet dus digitaal gevisualiseerd worden (bijvoorbeeld door met kleur te onderstrepen).

- De docent kan niet veel heen en weer lopen, tenzij de camera continu bediend wordt en meeloopt met de docent; anders is de docent niet in beeld op de Remote sites.
- De docent moet bij voorkeur de VC-set zelf goed kunnen bedienen. Het is te duur om bij iedere VC-les een ict-medewerker (of iemand anders) erbij te laten zijn om de apparatuur te bedienen. Daarom hebben alle deelnemende docenten een cursus over de VC-set via video-conferencing(!) gevolgd.

Wat vinden de leerlingen?

Natuurlijk wordt het vak wiskunde D vooral gekozen door gemotiveerde leerlingen. Het blijft voor de docent echter altijd de uitdaging om de lessen zo interessant mogelijk te maken en te houden. Door het gebruik van videoconferencing kan dit ook: de meeste leerlingen vinden de VC-lessen een heel leuke manier van les krijgen. Na een paar lessen krijgen de leerlingen door dat ook een VC-les toch gewoon les is. Ze raken dus vrij snel gewend aan deze manier van lesgeven. Maar het blijft leuk omdat deze generatie het nu eenmaal plezierig vindt om met nieuwe media te werken.

Bij de evaluatie hebben de meeste leerlingen ook aangegeven dat ze:

- weinig moeite hebben met het wennen aan een andere docent;
- het gevoel hebben bijna net zoveel van een VC-les op te steken als van een gewone les;
- hun vragen niet zo goed kwijt kunnen als in de traditionele les;
- de combinatie hoor- en werkcollege prima vinden.

De communicatie tussen de leerlingen van verschillende locaties lijkt nihil, maar niets is minder waar. Zo merkte een docent tijdens de pilot niet op dat twee vriendinnen op verschillende locaties naar elkaar zaten te wenken via de videocamera's! Bovendien hebben leerlingen op een Remote site, zodra ze even alleen zaten, het nieuwe 'kattenkwaad' ontdekt: met de afstandsbediening stiekem de camerapositie anders instellen. Alleen, is dit wel kattenkwaad of juist een geweldig nieuwe insteek om Remote overleg tussen leerlingen mogelijk te maken?

De uitdagingen: techniek en didactiek

Uiteraard kan een VC-set, net als andere ict-hulpmiddelen, storingen geven. Gebeurt dit tijdens een VC-les, dan kan dat lesuitval veroorzaken. Tijdens de pilots zijn een aantal technische storingen opgetreden waardoor bijvoorbeeld een Local site niet kon inbellen. Daardoor konden twee andere locaties geen VC-les volgen. De oplossing die in dit geval gekozen is, is dat deze twee locaties in een ander virtueel lokaal konden inbellen en als toehoorder (geluid uit!) de VC-les alsnog konden volgen. Dit was alleen mogelijk doordat in beide VC-lessen exact volgens dezelfde planning dezelfde stof behandeld werd. De leerlingen van de locaties konden echter geen vragen stellen of verwachten. Je kon merken dat de betrokkenheid van de leerlingen daardoor wel minder werd.

Na een aantal lessen bleken de VC-lessen gewoon lessen te zijn, maar dan met inzet van meer ict-hulpmiddelen dan in een 'normale' les.

De uitdaging kan de komende jaren liggen in het uittesten van nieuwe onderwijskundige concepten die mogelijk worden door inzet van deze nieuwe techniek. Juist doordat er steeds meer scholen, met ieder een eigen manier van werken, gaan meedoen, is de kans groot dat er nieuwe concepten bedacht worden.

Conclusie

Videoconferencing blijkt in de eerste pilots geschikt voor het geven van lessen op afstand aan kleine groepen leerlingen.

Er worden wel een aantal voorwaarden gesteld, waaronder:

- niet meer dan drie Remote sites kijken mee: met vier scholen in één cluster is wel een grens bereikt. Wil de VLD interactie onderhouden met elke bediende locatie, dan moet de voortgang van de les niet worden vertraagd door bij iedere klas te moeten checken of de stof begrepen is;
- het aantal leerlingen per Remote site moet beperkt blijven tot maximaal 8 à 10.

De verwachting vooraf was dat veel interactie met de leerlingen mogelijk rommelig zou worden, maar bovenal voor veel vertraging zou zorgen. En dat is ook gebeurd.

Nader onderzoek zal moeten uitwijzen of VC ook bij bijvoorbeeld projectonderwijs (al dan niet met leerlingen zelf achter de computer) of bij zelfstandig werken zinvol ingezet kan worden. Wat de werkelijke didactische/onderwijskundige meerwaarde is, willen we in ons tweede pilotjaar onderzoeken.

Daarnaast biedt deze nieuwe techniek mogelijkheden voor gastlessen: deskundigen kunnen via de video hun expertise aan klassen overbrengen, vragen beantwoorden en interactie met leerlingen hebben. Dit jaar wordt de pilot uitgebreid tot twaalf scholen waarbij het cluster Utrecht/Den Haag het gehele eerste leerjaar wiskunde D aanbiedt via een video-verbinding, en Twente twee andere modules ontwerpt.

Het DOT-concept van professionalisering blijkt succesvol te zijn. Het geeft een docent de mogelijkheid kennis te maken met nieuwe ontwikkelingen en deze te bediscussieren met collega's.

Over de auteurs

Monique Böhm is docente wiskunde/informatica aan het Bonhoeffer College te Enschede en deelnemster aan de DOT.

E-mailadres: bohm@bc-enschede.nl

Gerard Jeurnink is universitair docent bij de lerarenopleiding ELAN van de Universiteit Twente.

E-mailadres: g.a.m.jeurnink@utwente.nl

Delen van veeltermen met en zonder staart

DEEL 2

[Gerard Koolstra]

In het vorige deel^[1] is de 'tabelaanpak' aan de orde gekomen als alternatief voor de deling met een staart.

In dit deel gaan we wat nader in op verwante aanpakken, en op efficiënte notaties.

Ik noem eerst een aanpak die ook in *Getal en Ruimte* voorkomt.

Je schrijft eerst:

$$2x^3 - 7x^2 + 10x - 8 = (x - 2) \cdot (ax^2 + bx + c)$$

Als je weet dat de deling 'uitkomt'. Haakjes wegwerken geeft:

$$2x^3 - 7x^2 + 10x - 8 = ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c$$

Waarna berekend kan worden dat

$$a = 2; b = -3 \text{ en } c = 4.$$

Ook de volgende aanpak die bij *Moderne Wiskunde* voorkomt, is verwant.

$$\begin{aligned} \frac{2x^3 - 7x^2 + 10x - 8}{x - 2} &= \frac{2x^2(x - 2) - 3x^2 + 10x - 8}{x - 2} = \\ &= \frac{2x^2(x - 2) - 3x(x - 2) + 4x - 8}{(x - 2)} = \\ &= \frac{2x^2(x - 2) - 3x(x - 2) + 4(x - 2)}{x - 2} \end{aligned}$$

Maar in beide gevallen is de uitvoering en het bijbehorende 'plaatje' heel anders. Er is echter een methode die qua uitvoering en beeld veel lijkt op de tabelaanpak – zeker als we de notatie nog een beetje aanpassen.

Die methode is het zogeheten *schema van Horner*. In eerste instantie is *Horner* een efficiënte methode om de uitkomst van een veelterm te bepalen voor een bepaalde waarde van x .

We nemen als voorbeeld $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

Bij de normale aanpak zijn er 10 (= $4 + 3 + 2 + 1$) vermenigvuldigingen nodig. De inefficiëntie blijkt al uit het feit dat de $5x^4$ en $4x^3$ los van elkaar worden berekend, terwijl ze een factor x^2 gemeenschappelijk hebben. Herschrijven van de veelterm in de vorm

$(x - 4)x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ maakt een meer efficiënte aanpak mogelijk, die we hier uitvoeren voor $x = 7$:

$$\begin{array}{rcl} 5 \times 7 - 4 & = & 31 \\ 31 \times 7 + 3 & = & 220 \\ 220 \times 7 - 2 & = & 1538 \\ 1538 \times 7 + 1 & = & 10767 \end{array}$$

figuur 1

In het schema van Horner wordt dit als volgt genoteerd:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 7 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 \\ & & 35 & 217 & 1540 & 10766 \\ \hline & & 31 & 220 & 1538 & 10767 \end{array}$$

figuur 2

Deze zelfde aanpak wordt ook wel gebruikt bij het delen van het polynoom $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ door $(x - 7)$. Over het waarom valt veel te zeggen, maar het is misschien het beste om de deling eerst uit te voeren met de tabelaanpak; zie de stappen *in figuur 3*.

We komen niet alleen dezelfde coëfficiënten tegen, maar ook de berekening en de notatie zijn, op een enkel detail na, hetzelfde. Wanneer we korthedshalve alleen de coëfficiënten (en constanten) noteren, wordt de overeenkomst met Horner nog duidelijker; zie *figuur 4*.

De notatie bij Horner is nog iets korter. Daar staat tegenover dat het schema in eerste instantie alleen geschikt is voor delers van de vorm $(x - a)$.

Bij deling van $2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$ door $(2x - 3)$ moet een foefje toegepast worden. Eerst wordt de deler gehalveerd, en vervolgens de uitkomst; zie *figuur 5*.

De tabelaanpak in dit geval staat *in figuur 6a*. Zie *figuur 6b* voor de verkorte vorm.

De deling met (een variant op) het schema van Horner wordt in Angelsaksische landen *synthetic division* genoemd, tegenover *long division* (de staartdeling).

Het is misschien goed om nog eens op

diverse manieren een deling met polynomen onder elkaar te zetten en te letten op de overeenkomsten en verschillen.

We kiezen voor $\frac{x^3 - 12x^2 - 42}{x - 3}$ welke vorm achtereenvolgens wordt aangepakt met de staartdeling (*in figuur 7a – long division*), 'haphmethode' (*in figuur 7b – partial quotients division*), de tabelaanpak met en zonder variabelen (*in figuur 7c en figuur 7d*), en het schema van Horner (*in figuur 7e – synthetic division*).

De laatste is in dit geval ogenschijnlijk (of klaarblijkelijk?) de kortste. Kan het nog korter? In sommige gevallen wél, zeker als de deler eenvoudig is.

Delingen als $\frac{x^3 - 12x^2 - 42}{x}$ en $\frac{4x^3 - 12x^2 + 4}{x^2}$ kunnen zonder enig schrijfwerk herleid worden tot resp. $x^2 - 12x - 42$ en $4x - 12 + \frac{4}{x^2}$. Iets dergelijks geldt (misschien na enige oefening) ook voor vormen als $\frac{x^2 - 4x}{x - 4}$ en $\frac{4x^2 - 4x}{x - 1}$.

Maar dan zouden ook delingen als $\frac{x^2 - 4x + 2}{x - 4}$ en $\frac{4x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ bij voorkeur uit het hoofd herleid moeten worden.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 4x + 1}{x - 1} &= 4x + \frac{1}{x - 1} \\ \frac{4x^2 - 4x}{x - 1} &= 4x \end{aligned}$$

Soms geldt inderdaad 'Life is too short for long division'.

Noot

[1] Gerard Koolstra (2011): *Delen van veeltermen met en zonder staart*, deel 1. In: *Euclides* 87(3); pp. 104-105.

Over de auteur

Gerard Koolstra is docent wiskunde aan het St. Michaël College in Zaandam. E-mailadres: g.koolstra@chello.nl

step 1

x	$5x^3$	rest
x	$5x^3$	
-7	$-35x^3$	
	$5x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	

step 2

x	$5x^3 + 31x^2$	rest
x	$5x^3 + 31x^2$	
-7	$-35x^3 - 217x^2$	
	$5x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	

step 3

x	$5x^3 + 31x^2 + 220x$	rest
x	$5x^3 + 31x^2 + 220x$	
-7	$-35x^3 - 217x^2 - 1540x$	
	$5x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	

step 4

x	$5x^3 + 31x^2 + 220x + 1538$	rest
x	$5x^3 + 31x^2 + 220x + 1538x$	
-7	$-35x^3 - 217x^2 - 1540x - 10766$	
	$5x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	

step 5

x	$5x^3 + 31x^2 + 220x + 1538$	rest
x	$5x^3 + 31x^2 + 220x + 1538x$	10767
-7	$-35x^3 - 217x^2 - 1540x - 10766$	-10766
	$5x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$	+1

figuur 3

x	5	31	220	1538	rest
1	5	31	220	1538	10767
-7	-35	-217	-1540	-10766	
	5	-4	+3	-2	+1

figuur 4

1.5	2	-13	+23	-12
		3	-15	12
	2	-10	8	0

Antwoord: $1x^2 - 5x + 4$

figuur 5

x	x^2	$-5x$	$+4$	
2x	$2x^3$	$-10x^2$	$+8x$	0
-3	$-3x^2$	$+15x$	-12	
	$2x^3$	$-13x^2$	$+23x$	-12

figuur 6a

figuur 6b

x	1	-5	+4	
2	2	-10	+8x	0
-3	-3	+15	-12	
	2	-13	+23	-12

figuur 7a

	x^2	$-9x$	-27
$x-3$	x^3	$-12x^2$	-42
	x^3	$-3x^2$	
		$-9x^2$	-42
		$-9x^2$	$+27x$
			$-27x - 42$
			$-27x + 81$
			-123

figuur 7b

x	x^2	$-9x$	-27	
x	x^3	$-9x^2$	$+27x$	-123
-3	$-3x^2$	$+27x$	$+81$	
	x^3	$-12x^2$		-42

figuur 7c

x	1	-9	-27	
1	1	-9	$+27x$	-123
-3	-3	$+27$	$+81$	
	1	-12	0	-42

figuur 7d

3	1	-12	0	-42
		3	-27	-81
	1	-9	-27	-123

figuur 7e

Lesson Study

DEEL 2

[Nellie Verhoef]

Nellie Verhoef gaf in het vorige nummer van *Euclides* (zie [1]) een overzicht van de Lesson Study methode. In dit deel gaat ze in op haar ervaringen met Lesson Study in de praktijk.

Denkactiviteiten in de context van bewijzen in de meetkunde

De docenten, deelnemers aan de *Community of Learners* (CoL) in Twente, besluiten eensgezind zich in het voorjaar 2011 te concentreren op het onderwerp bewijzen en redeneren in 4-vwo, als voorloper op het onderwerp bewijzen in 5-vwo. Aansluitend op het artikel van Henk Rozenhart (zie [2]) geven de docenten aan dat dit onderwerp met meer overtuiging is aan te zwengelen als je een getallenvoorbeeld gebruikt. Bijvoorbeeld: 'Als n een natuurlijk getal is, dan is $n^2 - n + 41$ altijd een priemgetal' of 'Kwadraten van natuurlijke getallen eindigen nooit op een 2'. Soms lijkt een probleem meetkundig, terwijl dan achteraf de oplossingsstrategie weer algebraïsch is zoals bijvoorbeeld het probleem in *figuur 1*.

De formule om het aantal vlakken bij n punten te berekenen lijkt op het eerste gezicht gewoonweg 2^{n-1} ; nadere analyse leert echter dat dat niet klopt. Het juiste verband wordt gegeven door de formule: $\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$. Leerlingen zijn, volgens de docenten, gemakkelijk te motiveren om op zoek te gaan naar een bewijs. Maar hoe in de meetkunde? De meetkundevoorbeelden die in het boek staan, geven leerlingen niet de indruk dat een bewijs nu zo noodzakelijk en nuttig is. Toch willen de docenten in de CoL de uitdaging aangaan een meetkundevoorbeeld – een denkactiviteit – te gebruiken in 4-vwo, als introductie op de meetkunde in 5-vwo, ten einde leerlingen ervan te overtuigen dat een bewijs nodig is. Bij de uitvoering van de les zijn er zoveel mogelijk observanten om te registreren wat leerlingen nu precies doen en niet-doen. Dit is een kernelement van de Lesson Study.

Literatuuronderzoek

Elk van de docenten leest vooraf een artikel over onderzoek, en presenteert dat op de eerstvolgende bijeenkomst op de universiteit

Dat kost tijd en vergt energie, maar dat kan ook omdat alle docenten 0,1 fte voor het participeren in de CoL krijgen (*figuur 2*). In één van de artikelen, 'The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments' (zie [3]), gaat het om de rol van tegenspraak en onzekerheid als stimulans om te gaan bewijzen, gebruikmakend van ICT. Verrassing kan stimulerend zijn. Kenmerkend voor bewijzen wordt genoemd: deductief redeneren, algemeenheden laten zien en systematiseren als intellectuele uitdaging. De docenten komen op het idee om verwarring te zaaien, hetgeen misschien tot de noodzaak van bewijzen zou kunnen leiden. In een ander artikel 'Proofs through exploration in dynamic geometry environments' (zie [4]) wordt het zelf ontdekken, exploreren, communiceren en verifiëren met behulp van ICT sterk benadrukt. Concreet wordt aanbevolen 'open ended' vragen te gebruiken. In het artikel wordt gewaarschuwd voor teveel ict-gebruik, dat heeft een negatief effect: waarom zou je nog twijfelen? Je hoeft er zelf niets meer voor te doen – de tekeningen ontstaan veel te gemakkelijk. Op basis van het literatuuronderzoek wordt besloten dat de ene deelgroep zich concentreert op een activerende werkvorm met open vragen (een opdracht die bijna aan het einde van het hoofdstuk staat), terwijl de andere deelgroep zich toespitst op de deductieve, stapsgewijze aanpak.

Lesontwerpen en materiaal

Vanwege de grootte van de groep wordt besloten twee lessen te ontwerpen, die beide op drie verschillende scholen drie maal zullen worden uitgevoerd, waarvan twee maal bijgesteld.

Lesontwerp 1

De docenten willen leerlingen activeren en kiezen voor een inductieve aanpak. Ze maken een werkblad dat uit vier bladen bestaat (*zie figuur 3*).

De hand-out hierbij – het is opgave 41 uit *Getal & Ruimte* vwo-B (tiende editie; pag. 151) – staat in *figuur 4*.

Lesontwerp 2

Het uitgangspunt is hier een puur deductieve aanpak, op grond van de postulaten van Euclides. De congruentiegevallen komen immers voort uit de postulaten. De docenten kiezen voor een plenaire start om daarna leerlingen zoveel mogelijk in groepen laten werken. De eerste vraag luidt: 'Waar denk je aan bij het vak meetkunde?' De docent gaat vervolgens in op het benodigde 'gereedschap', zoals definities, axioma's en stellingen, en eindigt met de vijf postulaten van Euclides. Het laatste postulaat krijgt extra nadruk. De les vervolgt met de zes elementen van een driehoek (drie zijden Z en drie hoeken H) en mondt uit in het noemen van het begrip congruentie. Er volgen drie opgaven die uitlokken tot een bewijs (*zie figuur 5*). De les eindigt met de vraag een driehoek ABC te construeren met hoek A van 40° , $AC = 5$ cm en $BC = 4$ cm (ZZH).

Observatie

De observanten zijn naast CoL'ers ook collega's van dezelfde school en in een enkel geval een directielid (dat is helemaal mooi!). Ik zie en hoor, eind mei – midden in de examentijd – wat 4-vwo-leerlingen tegen elkaar zeggen.

Observatie(s) van lesontwerp 1

Op de eerste vraag 'Welke begrippen/methode/kennisfeiten komen bij je op als je denkt aan wat je de afgelopen jaren op school hebt geleerd op het gebied van meetkunde?' komen verrassende antwoorden: Pythagoras, sinus- en cosinusregel, abc -formule, ... Geen van de leerlingen heeft het over figuren, gelijkvormigheid of congruentie. Eén leerling hoor ik zeggen: 'Het gaat om méétkunde?' Maar helaas, niemand luistert.

Bij de tweede vraag naar de oppervlakte van een rechthoekige driehoek die op ruitjes-

figuur 1
Verdeling van een cirkel

Hand- of Kleinkunde en Levensjaar – nu twee keer zonder afrekening en

figuur 3

Korte inhoud van de werkbladen



figuur 2
Samenwerken in een CoL

Enslaved in road by 1960 (1960)	Enslaved in blow by 1960 (1960)	Kenneth J. G. Jones
100	100	
100	100	
100	100	
100	100	

Welche der beiden das je, was da congruentia gehen je, er
Wahrscheinlich, das sind dann

figuur 4
Hand-out bij de opgave

- De vraag is nu wel: drietal wel congruente driehoeken levend en wel ke niet.

figuur 5

Opgaven om een bewijs uit te lokken



figuur 6
Schuiven met de geo-driehoek

papier is getekend, gaan leerlingen hokjes tellen en komen snel op het goede antwoord. Maar bij de volgende vraag naar de oppervlakte van een stomphoekige driehoek – met dezelfde hoogte als de vorige – tellen ze geen hokjes, maar proberen de driehoek te verdelen in kleinere driehoeken en dan op te vullen tot een rechthoek. Het lukt niet zo best, want de overgebleven stukken worden steeds kleiner en liggen steeds schever. Maar ‘mijn groepje’ geeft niet op. Ze gaan stug door en trekken zich helemaal niets aan van wat er op het bord gebeurt. Ze zien het niet eens.

De laatste vraag is uitdagend. In ‘mijn groepje’ wordt echter direct afgesproken het stappenplan niet te gebruiken – gewoon eerst zelf maar eens proberen. Ze komen er niet uit, luisteren niet naar het antwoord van de docent dat op het bord verschijnt. Ze vragen of de opdracht wat later (morgen) ingeleverd kan worden. Dat kan!

Sterker nog – er is een prijs te verdienen voor degene die een alternatieve oplossing aandraagt. En ja, daar gaan ze voor. De leerlingen verlaten de les, discussiërend over een mogelijke oplossingsstrategie. ‘Mijn groep’ is écht van plan de prijs te winnen!

Observatie(s) van lesontwerp 2

Het is opvallend dat de leerlingen bij het oplossen van de problemen geen analysefiguren (schetsen) maken. Ze gaan rekenen, en als ze tekenen (veelal met pen), dan is de tekening een weerslag van de gedachte. Er wordt geen passer gebruikt, er wordt met de geo-driehoek geschoven (*zie figuur 6*). Soms wordt er gevraagd ‘of dat wel nauwkeurig is’. Maar dat valt in het niet... de argumenten die tellen, zijn berekeningen, geen tekeningen. Leerlingen gaan individueel aan het werk; logisch als er geen behoefte aan samenwerken is (ook niet gewend).

Bij de eerste opgave is er in ‘mijn groepje’ een meisje dat meteen op het idee van de hoogtelijn komt, dat overtuigt de anderen. Mooi klaar. Andere groepjes vragen zich af hoe groot de hoeken zijn, maar ook dat komt goed. Ook opgave 2 gaat goed; de leerlingen overtuigen elkaar met berekeningen die worden geïllustreerd door tekeningen. De laatste opgave is toch wel moeilijk. In ‘mijn groepje’ vragen de leerlingen zich allereerst af hoeveel mogelijkheden er zijn. Er wordt negen geroepen! Of toch niet? Daar was een formule voor, die ze vorig jaar gehad hebben. En jawel: het had te maken met drie uit een groep van twee, of twee uit een groep van drie. Acht – drie boven twee toch? Ja, ze zijn overtuigd: acht! Welke dan? Er wordt keurig een rij gemaakt. Zo gaat de tijd voorbij zonder aan de eigenlijke opdracht toe te komen. In een andere groep wordt zelfs zo fanatiek getekend dat het tafelblad er aan te pas komt. Het wordt snel



MEDEDELING / VOORAANKONDIGING cTWO WISKUNDE C CONFERENTIE

De grootste vernieuwing bij de landelijke invoering in 2015 van de herziene examenprogramma's voor wiskunde (havo en vwo) vindt plaats bij wiskunde C.

De vernieuwingscommissie cTWO organiseert mede daarom op **woensdag 14 maart 2012** voor de tweede keer een Wiskunde C-conferentie. Deze dag op de Hogeschool Domstad in Utrecht is bestemd voor docen-

ten vo en andere belangstellenden.

Het vernieuwde wiskunde C-programma is volledig toegesneden op de belangstelling en mogelijkheden van de vwo-leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij. De ervaringen, zoals die de afgelopen cursusjaren zijn opgedaan bij leerlingen en docenten van de pilotscholen, zijn erg de moeite waard zodat cTWO dit onder de aandacht van alle vo-docenten wil brengen. Temeer omdat in het huidige programma 60 studielasturen beschikbaar zijn in de vorm van Keuzeonderwerpen zodat hierbinnen onderdelen uit het vernieuwde programma heel goed inzetbaar zijn.

Ook zal op deze dag aandacht besteed worden aan allerlei praktische en organisatorische zaken rondom het vak wiskunde C. Het (voorlopige) programma in het kort: Start om 10:30 uur door Peter van Wijk, projectleider van cTWO; Plenaire presentatie door Ionica Smeets (één van de Wiskundemeisjes): *Wiskunde in 1001 verhalen*;

Twee workshoprondes met de volgende onderwerpen: *Lesmodule Leesbaarheid* (Gerard Koolstra), *Lesmodule Geschiedenis van getallen* (Henk Reuling), *Het domein Algebra en tellen binnen het examenpro-*

gramma wiskunde C (Piet Versnel), *Het CE Wiskunde C, het voorbeeldexamen* (Ger Limpens), *Geometrie in de kunst* (Carla Feijens), *Wiskunde C op HAVO?!* (Peter van Wijk), *Simon Stevin en Museum Boerhaave* (Steven Wepster), *De brug tussen kunst en wiskunde C* (Monique Pijs);

Plenaire presentatie door Ton Verhoef: *De wiskunst van Koos Verhoef*;

Afsluiting om 15:15 uur met borrel en snack.

Het programma met uitgebreide omschrijvingen van de presentaties en workshops is te vinden op de website van cTWO (www.ctwo.nl).

De toegang is **gratis**, dus noteer **woensdag 14 maart 2012** alvast in uw agenda! Wel is van te voren inschrijven noodzakelijk. Dat kan via een digitaal aanmeldingsformulier dat te vinden is op www.ctwo.nl onder het tabblad Wiskunde C (Nieuws). Er geldt: vol is vol!

Informatie

Verdere informatie kan worden verkregen bij het cTWO-projectteam: Theo van den Bogaart, Hielke Peereboom en Peter van Wijk (email: info@ctwo.nl).

met spuw weggepoetst (zo zie je maar, niks kwaads in de zin). Een ander groepje komt helemaal nergens – ze raken gedemotiveerd. Ze hebben niets aan elkaar ...

Het is opvallend dat leerlingen helemaal vergeten dat observanten dicht naast hen zitten. Voor de observanten blijft het moeilijk om niet in te grijpen, even helpen, even ...

Evaluatie

De docenten blijven een uur extra om te reflecteren. We zijn het allemaal roerend eens: nooit geweten dat leerlingen doen wat ze doen! Het geeft een kick, nu kun je beter op hen inspelen!

Evaluatie(s) van lesontwerp 1

Algemeen was de motivatie uitstekend. De uitleg in de eerste les was te lang – het stappenplan kan weg. Dat weglaten beviel prima in de tweede les. Opvallend was dat leerlingen bij meetkunde de *abc*-formule noemen, en Pythagoras – ze komen niet op het idee van figuren of gelijkvormigheid. Ze noemen wel F- en Z-figuren. Aan de noodzaak tot bewijzen (het doel) kwam de docent uiteindelijk niet eens toe, te weinig tijd. Eén leerling zei zelfs: ‘Geef mij maar gewoon een les rekenen!’. Het is niet goed om halverwege de aandacht op te eisen – leerlingen willen zelf uitzoeken hoe het zit. Leerlingen kwamen zelf met de vraag ‘En hoe moeten we dat dan opschrijven?’ Ze kwamen met de term *congrueren*. De docent heeft na DE les nog drie andere lessen over hetzelfde onderwerp gegeven, zonder huiswerk (één vraag per les). Hij heeft er een goed gevoel over: leerlingen zagen zelf in dat de oppervlakte van een parallellogram niet verandert als de basis gelijk blijft.

Evaluatie(s) van lesontwerp 2

De leerlingen waren zeer gemotiveerd – de sfeer was prima. Euclides is nu niet een naam waar ze van opschrikken. De uitspraak ‘Een punt is een hoek waar de benen afgehaald zijn’ is verrassend. Het aanbieden van een minder gestructureerde opgave was een goede zet. Bij de congruentiegevallen kwamen leerlingen zelf op het geval ZZH. Eén leerling merkte zelfs op dat ZZR equivalent is aan ZZZ vanwege de stelling van Pythagoras. Wat betreft de noodzaak tot bewijzvoering ligt de zaak gecompliceerder. Er zijn wel veel sommen gemaakt. Een docent geeft aan dat er altijd een zekere

druk is om veel sommen te maken, dan ben je weer bij! Er is wellicht te weinig stilgestaan bij sommige aspecten. De laatste vijf minuten zijn eigenlijk altijd al niet-productief, om rust te creëren. Het *socializen* is nu eenmaal een belangrijk aspect in het onderwijs. Een andere docent is destijds afgeknapt op het systematisch uitknobbelen van zes mogelijkheden. Aan het doel – motiveren om een bewijs te leveren – is niemand eigenlijk toegekomen. Volgende keer wordt verondersteld dat de motivatie toeneemt bij het oplossen van de opgaven uit *Getal & Ruimte*, opgeleukt met een Geogebra-applet. Maar, stuur je leerlingen nu naar het statische bewijs gebruikmakend van ZZH of naar het dynamische bewijs gebruikmakend van een transformatie? Sommige leerlingen vragen: waarom ZZH en niet HZZ – tja, je kunt geen hoek tekenen zonder een zijde te gebruiken. Eén docent observeerde alleen het punten slijpen en het niet-construeren van de bedoelde gelijkzijdige driehoek. Kennelijk vonden de leerlingen er niets aan. Van niet-succesverhalen leer je ook. De opgaven moeten dus anders, of de werkvorm... Leerlingen leren van elkaar, van de onderlingen discussies. Een essentieel aandachtspunt blijft ook het ophalen van voorkennis.

Conclusie

Wat gaat er nu veranderen in de lessen die nog gegeven gaan worden? Het moet open! Laat leerlingen meer zelf uitzoeken en daag ze uit. Dat kost tijd, maar je wint er ook veel mee zoals motivatie.

Observeren is ook een vak, de een vindt alles opschrijven teveel, een ander observeert gedrag en inhoud en vindt interveniëren geen punt, juist omdat hij alles wil weten. Weer een ander observeert subjectief, maar heeft er dan ook veel aan (gewoon, wat je opvalt, noteer je). Toch moet er een heldere afspraak komen over de manier van observeren.

Het doel – uitdagen tot bewijzvoering in de meetkunde – is niet voldoende tot zijn recht gekomen. Het blijkt weer dat het ontwerpen en het implementeren daarvan op allerlei onverwachte hindernissen stuit. Wel is naar voren gekomen dat leerlingen gemotiveerd aan het werk gezet kunnen worden met uitdagende opdrachten – denkactiviteiten.

Noten

- [1] Nellie Verhoef (2011): *Lesson Study*, deel 1. In: *Euclides* 87(3); pp. 111-113.
- [2] Henk Rozenhart (2011): *Kleine didactieken*. In: *Euclides* 86(6); pp. 275-277.
- [3] N. Hadas, R. Hershkowitz, B.B. Schwarz (2000): *The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments*. In: *Educational Studies in Mathematics* 44; pp. 127-150.
- [4] C. Mousoulides, N. Pitalis, M. Pitta (2004): *Proofs through exploration in dynamic geometry environments*. In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*; volume 2, pp. 215-222.

Over de auteur

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente. E-mailadres: n.c.verhoef@utwente.nl

Met wiskunde Europa ontdekken

ONLINE SAMENWERKEN MET COLLEGA'S GEEFT VERDIEPING

[Floor Nusink en Erik Atsma]

Samenwerken met een school in het buitenland, kan dat ook met wiskunde? Jazeker! Erik Atsma, docent wiskunde aan het Hervormd Lyceum West in Amsterdam liet leerlingen wiskundige opdrachten maken van en voor Europese leeftijdsgenoten: 'Door inspirerende opdrachten wordt wiskunde reëel, bovendien oefenen ze hun taalvaardigheid!'



Afgelopen schooljaar voerde Erik Atsma voor de tweede keer online een eTwinning-project (zie kadertekst **eTwinning**) uit: *A Taste of Maths* (ATOM), met collega's in Roemenië, Tsjechië, Spanje, Griekenland en Italië. De betrokken leerlingen, tussen de 12 en 16 jaar oud, werkten gedurende een schooljaar samen in het Engels. Het doel van ATOM was leerlingen te enthousiasmeren voor het vak wiskunde door ze op een andere manier naar wiskunde te laten kijken. Atsma licht toe: 'We willen de leerlingen uitdagen door alledaagse aspecten van het leven in Europa te combineren met algemene mathematische inhoud van het curriculum. We doen dit door gebruik te maken van concrete voorwerpen en vertalingen van mathematische concepten. Zo hopen we meteen wederzijds begrip te kweken voor de wereld waarin leeftijdsgenoten leven.'

Verrassende opdrachten

De docenten van de zes scholen bedachten samen allerlei stimulerende opdrachten voor hun leerlingen. Het project begon met een logowedstrijd. Voor de opdracht *Spicy maths riddles* maakten de leerlingen presentaties of filmpjes van wiskundige opdrachten voor hun medeleerlingen. De antwoorden werden ook op ludieke wijze gepresenteerd. Voor de opdracht *A Piece of Pie* (zie kadertekst **A Piece of Pie**) moest iedereen uitrekenen hoeveel het in elk land zou kosten om een stukje appeltaart te maken. De uitkomsten gaven aanknopingspunten om allerlei gerelateerde zaken te bespreken, want waar komen die verschillen eigenlijk vandaan? Er was een ketting-opdracht: elke deelnemende klas maakt voor een klas in een ander land een opdracht.

Atsma: 'Dit bleek een leuke manier van opdrachten "doorgeven" en het zorgt ervoor dat je niet teveel opdrachten krijgt. De leerlingen uit de diverse landen waren echter zo enthousiast dat alle landen niet alleen de opdracht hebben gemaakt die ze moesten maken, maar ook alle andere opdrachten! Onze opdracht uit Italië ging

over snoepjes: Olga en Francesca gaan snoepjes verdelen en doen dat als volgt: eerst pakt Olga er één, dan pakt Francesca er twee, vervolgens Olga 3, Francesca 4 enzovoort. Als Francesca de laatste snoepjes uit de bak pakt heeft ze er in totaal 10 meer dan Olga. De vraag is nu hoeveel snoepjes er in het begin waren. Uiteraard heb ik ervoor gekozen om ook echte snoepjes voor de leerlingen te kopen om de opdracht uit te voeren! Dit resulteerde in een opdracht die voelbaar was en daarnaast ook nog heel lekker, want ze mochten alle snoepjes opeten. De opdracht heb ik vervolgens op nog twee manieren uitgevoerd: eerst met behulp van Excel en toen met behulp van (som)rijen. Een onderwerp dat het niveau van deze tweede klas ver te bovengaat, maar ik heb het moment gebruikt om ze er alvast mee te laten kennismaken.'

Maths is all around us

Het doel van deze opdracht was om de leerlingen duidelijk te maken dat wiskunde overal om ons heen is en dat je bijvoorbeeld getallen en vormen in het dagelijkse leven constant tegenkomt. Ieder land heeft voor een wiskundig onderwerp gekozen om te zoeken in de wereld om hen heen. Een groep keek bijvoorbeeld naar de geometrie, een andere naar perspectief en op het Hervormd Lyceum West (HLW) behandelden ze op dat moment vergroting. Atsma licht toe: 'Wij hebben foto's gemaakt en gezocht van allerlei zaken die zo goed als mogelijk elkaars vergroting waren. Elk land heeft vervolgens de resultaten op de TwinSpace en het Blog gezet. Die resultaten zijn weer in verschillende presentatievormen weergegeven (*Vuvox*, *Vimeo*, *Kizoa*; zie Noten onder **Software**). Deze opdracht hebben we in een paar weken uitgevoerd inclusief het maken van de verschillende presentaties. De opdracht heeft duidelijk gemaakt aan leerlingen dat er veel meer wiskunde om ons heen is dan ze zelf denken. Zeker toen ze de presentaties van de andere landen zagen, beseften ze dat.'



eTwinning is de online community voor scholen die Europese samenwerking stimuleert met behulp van ICT. Via « www.etwinning.net » vinden meer dan 130.000 leraren in Europa elkaar en werken

hun leerlingen samen. De community is bedoeld voor iedereen die les geeft aan leerlingen van 4 tot 21 jaar. Het doel van de projecten is: het opdoen van internationale ervaring, het stimuleren van ict-vaardigheden en het uitvoeren van verplichte lesstof op een inspirerende manier. In elk deelnemend land is er een helpdesk. In Nederland is dat het *Europees Platform*; meer informatie is te vinden op de website van het platform^[3].

A Piece of Pie



De opdracht gaat over het maken van appeltaart voor de eigen groep en hoeveel het kost om één stukje appeltaart te maken. Het doel van deze opdracht was om de leerlingen eens goed te laten rekenen met

allerlei eenheden van gewicht en inhoud en de kosten van de bijbehorende producten. Dit moest dan worden vertaald naar de grootte van de groep.

Atsma vertelt: 'Het was grappig om te zien dat de aanpak van de meeste landen bij deze, wiskundig misschien wat simpele, opdracht vaak hetzelfde was. De uitkomsten van de kosten van één stukje appeltaart hebben in de klas wel weer voor leuke discussies gezorgd, want de bedragen lagen soms behoorlijk ver uit elkaar. Deze opdracht hebben we in een paar weken uitgevoerd inclusief het maken van de verschillende presentaties (veelal met *Vuvox*). De opdracht heeft duidelijk gemaakt aan leerlingen dat het kunnen rekenen met

verschillende maten voor gewicht en inhoud en het gebruiken van verhoudingen belangrijke wiskundige basisvaardigheden zijn. Verder zat er ook een economisch tintje aan door de verschillen in de uitkomsten. Dit is weer een insteek voor een gesprek over de financiële mogelijkheden van verschillende landen. Dit zou een goede mogelijkheid zijn om vakoverstijgend samen te werken met collega's van bijvoorbeeld economie. Op het HLW is dit om verschillende redenen niet gebeurd, ondermeer omdat de tweede-klassers nog geen economie krijgen. Het hangt natuurlijk ook af van de samenwerking tussen collega's of dit mogelijk is.



In het kader van de Dag van Pi (op 14 maart) is er een videoconferentie met alle scholen gehouden, via *Flash meeting* (zie Noten, onder **Software**).

De opdracht *Maths is all around us* (zie kadertekst **Maths is all around us**) had als doel de leerlingen duidelijk te maken dat wiskunde overal om ons heen is, en dat getallen en vormen een onderdeel zijn van het dagelijkse leven. Ieder land heeft voor een ander wiskundig onderwerp gekozen om te zoeken in de wereld om hen heen. De laatste opdracht betrof het maken van een gedicht over brood, waarbij de rij van Fibonacci het ritme bepaalde. Alle gedichten werden in de moedertaal en in het Engels geschreven (zie kadertekst **Gedicht** op pag. 151).

Atsma: 'De resultaten waren zo mooi dat ik er een boek van heb laten maken!'

Internationaal samenwerken

Erik Atsma werkt sinds 2008 online samen via eTwinning. Met zijn eerste project *My Town in Numbers* won hij de tweede eTwinning-prijs op Europees niveau.

Atsma: 'Dat was echt een enorme opsteker. Ik mocht naar Sevilla om de prijs in ontvangst te nemen. Omdat de samenwerking zo goed beviel, zijn we in 2010 weer een project gaan doen; er kwamen toen nog drie scholen bij. Door goede en vooral snelle communicatie tussen alle collega's en een strakke verdeling van onze werkzaamheden verliep het proces echt gesmeerd. We hebben geleerd van de valkuilen uit het eerste project, zoals het feit dat het niveau van de leerlingen in taal- en

wiskundevaardigheid zoveel mogelijk overeen moet komen. Met enkele partners waren sommige dingen wel iets lastiger af te stemmen, bijvoorbeeld als we een *Flash meeting* wilden houden.'

Het contact met collega's in Europa werkt erg inspirerend.

Atsma: 'De meerwaarde van samenwerken via eTwinning is dat ik op een leuke manier kan laten zien dat wiskunde niet alleen maar die saaie stof uit het boek is, zoals leerlingen dat vaak zien. Ze merken door allerlei reële zaken uit het dagelijks leven, dat wiskunde overal om hen heen is. Bovendien hebben we allerlei ict-hulpmiddelen gebruikt om antwoorden op verschillende vragen te verkrijgen. Hierdoor wordt je gaandeweg steeds handiger met presentaties. We hebben veel verschillende software gebruikt, maar doordat ik samen met collega's in Europa hiermee werk, leer ik nieuwe materialen kennen en maak ik het me echt eigen. Bovendien kan ik het ook voor andere lessen gebruiken.'

Superenthousiaste leerlingen

De leerlingen tweetalig onderwijs vinden het geweldig om samen te werken met leeftijdsgenoten in het buitenland. Het gebruik van het Engels wordt veel natuurlijker dan wanneer ze alleen Engels met hun docent spreken. Ze leren hun Europese medeleerlingen kennen door informatie uit te wisselen over zichzelf, de school en hoe wiskunde wordt gegeven.

Atsma: 'Ik vind het belangrijk dat de leerlingen zien hoe het er in een ander land aan toegaat op cultureel gebied en in het onderwijs. Ze raken erg gemotiveerd wanneer ze op school op een andere manier naar de wereld om hen heen leren kijken.

Dat enthousiasme zie je terug als ze in hun vrije tijd via *Flash meeting* met hun leeftijdsgenoten contact onderhouden. Het niveau van het Engels van mijn leerlingen is vaak behoorlijk hoger dan dat van de leerlingen in andere delen van Europa. Dat geeft ze natuurlijk veel zelfvertrouwen. Inhoudelijk vind ik het boeiend om te zien dat alle leerlingen bij het wiskundig oplossen van de problemen in de verschillende landen andere oplosmethoden en strategieën gebruiken. Daarvan leren ze dat er meer dan één manier is om tot een goed antwoord te komen.'

De evaluatie is in de opdracht *Breadcrumbs trail* gegoten. Er zijn door de leerlingen en hun docenten enquêtes in gevuld en verwerkt. De resultaten zijn te vinden in de *TwinSpace*, de online samenwerkingsruimte van eTwinning.^[1]

Het project is afgesloten met een *Voicethread* (zie Noten, onder **Software**) waaraan alle leerlingen hebben bijgedragen. De leerlingen hebben online opnames gemaakt van wat ze vonden van dit project. Het resultaat is een soort radio-interview.



Tips

Binnen ATOM was het geen doel op zich, maar het is wel handig als het lukt: het integreren van het eTwinning-project in de lesdoelen. Erik Atsma vindt een bepaalde

Goedgekeurd door CvE voor
het Centraal Eindexamen

TI-*nspire*™ TECHNOLOGIE

Een nieuwe visie vanuit meerdere wiskundige invalshoeken

Elke leerling leert op een andere manier.

De een begrijpt vergelijkingen vlot, de ander grafieken. De nieuwe TI-Nspire™ technologie voor Wiskunde en Exact is geschikt voor verschillende individuele manieren van leren. Lesmateriaal wordt gepresenteerd en onderzocht naar de voorkeur van de individuele leerling. Leerlingen kunnen daardoor wiskundige relaties en verbanden veel gemakkelijker waarnemen.

www.education.ti.com/nederland

**TI-Nspire™ CX kleuren
handheld + software
voor slechts € 59,-
Mail voor de aanbieding naar:
g-treurniet@ti.com**

(docentenaanbieding, 1 per docent)

**NU MET
KLEURENSCHERM,
EIGEN PLAATJES
DOWNLOADEN
EN OPLAADBARE
BATTERIJ**



 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Uw Expertise. Onze Technologie. Succes voor de Leerling.

mate van flexibiliteit essentieel wanneer je gaat samenwerken met collega's in Europa. Elk land behandelt dezelfde wiskundige thema's, maar niet in dezelfde volgorde, en ook niet op dezelfde manier. 'Die verschillen maken het samenwerken juist zo boeiend. Het gaat er niet om de opdrachten zo goed mogelijk in het lesprogramma te verwerken, het gaat om het contact dat je onderhoudt en hoe je de opdrachten met je klas uitvoert. Hoe enthousiaster je zelf bent, hoe enthousiaster je leerlingen worden. Het is zo leuk om te zien hoe andere landen met wiskunde omgaan, heel formeel. Wij gebruiken bijvoorbeeld verhoudingstabellen, maar dat zie ik niet terug bij Europese collega's.' Atsma voerde het project uit in reguliere lestijd; er is geen extra lestijd en ook geen extra taakuren voor de docent voor gereserveerd. Zelf investeerde hij wel tijd om de opdrachten voor te bereiden en uit te voeren. De leerlingen bereidden de opdrachten thuis voor. Alle video-conferenties via *Flash meeting* vonden buiten de lestijd plaats, omdat het anders niet in te plannen was. Verder heeft Atsma drie tips voor het effectief uitvoeren van een eTwinning-project:

1. Het is belangrijk om snel en goed contact te onderhouden met de projectpartners. Op die manier blijft het project op de rit, wordt het niet moeizaam om iets voor elkaar te krijgen.
2. Als je de leerlingen echt wilt laten samenwerken, moet je klein beginnen. Dus niet met tien scholen samenwerken; dan neem je een enorme organisatie op je nek.

3. Elke keer dat je een ander project uitvoert, verbeter je het weer omdat je er steeds meer achterkomt wat je wilt bereiken en hoe. Dat verschilt per persoon; het is de kunst om een goede balans te vinden tussen plannen en flexibiliteit.

Resultaten

De resultaten van het online samenwerken zijn te zien op de website van TwinSpace^[1]: inloggen met gebruikersnaam = Euclides en wachtwoord = wiskunde.

Er is ook een blog^[2], waarop veel informatie over het project te vinden is.

Noten

- [1] Website TwinSpace: <http://new-twinspace.etwinning.net/web/p38463> (inloggen met Gebruikersnaam = Euclides en wachtwoord = wiskunde).
 [2] Blog: <http://atasteofmaths.blogspot.com>
 [3] Website Europees Platform: www.europeesplatform.nl/etwinning

Software

Alle onderstaande programma's zijn vrij te gebruiken na gratis registratie.

- *Prezi* (<http://prezi.com>) is een presentatieprogramma.
- *Dvolver* (www.dvolver.com/moviemaker/index.html) en *Voki* (www.voki.com) zijn korte animatiefilmpjes waarin je tekst/geluid kunt plaatsen.
- *Kizoa* (www.kizoa.com) is een programma om een diashow te maken.
- Met *Scribd* (www.scribd.com) kun je PDF-bestanden op een mooie manier in een blog zetten.
- *Vimeo* (<http://vimeo.com>) is een programma om videofilmpjes online te plaatsen (zoals bij YouTube).
- *Vuvox* (www.vuvox.com) is ook een presentatieprogramma waarbij de presentatie als een lint voorbij loopt.
- Met *VoiceThread* (<http://voicethread.com>) kan je geluidsopnames maken.
- Om een videoconferentie te houden gebruik je *Flash meeting* (<http://flashmeeting.e2bn.net>).

Gedicht

Bread

- 1 Bread
- 1 Nature
- 2 Has made me
- 2 Love among persons.
- 5 A symbol of hard work.
- 6 Why I praise my hand in your hand
- 13 The simplest food but the most important symbol of unity: brotherhood and happiness
- 21 Let's make a circle to celebrate the harmony among nations. To celebrate bread: let's eat this symbol. This sign which unites.
- 31 A food which includes the colours of the world, which includes smiles of happy children. The only one way of union of humans, traditions. A history book which shows a series of great persons.

Panc

- 1 Panc
- 1 Nature
- 2 Has made me
- 2 Love among persons.
- 5 Un simbolo di dur lavoro.
- 6 Via perché la mia mano nella tua mano
- 13 Il più semplice cibo ma il più importante simbolo di pace, fraternità, felicità
- 21 Facciamo un cerchio per festeggiare l'armonia fra le nazioni. Per festeggiare il panc: mangia questo simbolo: questo simbolo che unisce
- 31 C'è che comprende i colori del sole e della terra. Che comprende i sorrisi di bambini felici. L'unica via di unione di culture, tradizioni. Libro che mostra della storia dei grandi.

Over de auteurs

Floor Nusink is projectmedewerker bij het Europees Platform. Ze werkt voor het eTwinning-project als communicatie- en helpdeskmedewerker.

E-mailadres: nusink@epf.nl

Erik Atsma is docent wiskunde op het Hervormd Lyceum West, Amsterdam.

E-mailadres: e.atsma@hlw.nl

Niet geschoten is altijd mis! ?

[Rob Bosch]



Inleiding

In dit artikel bespreken we een duel dat in twee opzichten verschilt van het klassieke duel tussen twee heren die op gepaste afstand hun pistolen op elkaar richten en dan op een teken van de duelleider een schot op elkaar afvuren.

Ons duel voltrekt zich namelijk tussen *drie* heren die hebben plaatsgenomen op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. Om de beurt richten de drie duellisten hun pistool op een tegenstander en hopen met een schot de uitgekozen tegenstander uit te schakelen (met uitschakelen bedoelen we hier dus dodelijk treffen). De volgorde waarin de deelnemers hun schoten lossen, is van te voren vastgelegd. Bij deze variant van het duel is het dus niet mogelijk dat twee duellisten tegelijkertijd worden uitgeschakeld. In dit driehoeksduel zal er aan het eind één deelnemer levend het strijdtonel verlaten. De drie deelnemers aan het duel onderscheiden zich door hun verschillende schutterskwaliteiten. Deze kwaliteit wordt voor iedere deelnemer gegeven door zijn *trefkans*: de kans dat hij met een schot een tegenstander uitschakelt. We nemen hierbij aan dat een duellist met een schot de tegenstander dodelijk treft, of dat hij mist. Door het toekennen van deze trefkansen wordt het berekenen van de overlevingskansen van de deelnemers een opgave uit de kansrekening. Maar omdat een duellist, in tegenstelling tot het traditionele duel, ook een keuze heeft op welke tegenstander hij zijn pistool zal richten, heeft het probleem ook een strategische of speltheoretische inslag. Het idee van dit driehoeksduel komt uit het boek *A Mathematical Mosaic* van Ravi Vakil^[2]. In dit boek wordt in het hoofdstuk ‘Game theory revisited’ het onderstaande probleem gesteld.

Drie duellisten gaan een driehoeksduel aan. Deelnemer *A* heeft een trefkans van $\frac{1}{3}$. Voor deelnemer *B* is deze kans $\frac{2}{3}$. De laatste duellist *C* is een perfecte schutter: zijn trefkans is gelijk aan 1. De drie duellisten maken de afspraak, noem het een gentlemen’s agreement, dat de zwakste schutter *A* het eerste schot mag lossen waarna *B* aan de beurt komt; daarna is het de beurt aan de sterkste schutter *C*. Een volgorde die in iedere ronde geldt, totdat er uiteindelijk één duellist overblijft.

Bereken de overlevingskansen van de drie duellisten onder hun optimale strategie.

De afspraak over de volgorde houdt in dat de deelnemers in een ronde waarin alle schutters nog in leven zijn, een strategische keuze hebben. Immers, nadat *C* aan de beurt geweest is, is er zeker één deelnemer uitgeschakeld en resteert er nog slechts een duel tussen twee tegenstanders. Merk op dat deze keuze in het bijzonder voor *A* belangrijk is. Hij moet immers bepalen op welke tegenstander hij zijn eerste schot zal richten.

We bespreken eerst de rationele strategieën voor de deelnemers om daarna de overlevingskansen van de deelnemers in het driehoeksduel uit te rekenen.

Rationele strategieën

Alvorens het duel kanstheoretisch te analyseren staan we even stil bij de keuze die een duellist heeft in het geval zijn beide tegenstanders nog in leven zijn.

Als *C* in een dergelijk geval aan de beurt is (*A* en *B* hebben dan in hun eerste poging gemist), heeft hij de keuze óf *A* óf *B* uit te schakelen, waarna volgens de afgesproken volgorde de overgebleven tegenstander in het duel met *C* het eerste schot mag lossen. Tegen duellist *A* heeft *C* een grotere overlevingskans ($\frac{2}{3}$) dan tegen duellist *B* ($\frac{1}{3}$). De rationele beslissing voor *C* is derhalve het uitschakelen van *B*.

Stel nu dat *B*, in het geval dat *A* én *C* nog in leven zijn, aan de beurt komt en dat hij de keuze moet maken op welke tegenstander hij zijn pistool richt. Als hij probeert *A* uit te schakelen, dan zal, ongeacht of hij treft of niet, volgens de

volgordeafspraken, *C* aan de beurt komen.

Duellist *C* zal, zoals we al hebben gezien, in deze beurt *B* uitschakelen. Door zijn pistool op *A* te richten, tekent *B* dus zijn eigen doodvonnis. De enige zinnige keuze die *B* heeft, is daarom het duel met *C* aan te gaan. Voor *A* is de keuze enerzijds belangrijker; hij moet immers al in zijn eerste beurt een keuze maken, maar anderzijds ook iets ingewikkelder. Het ligt echter voor de hand dat *A* probeert de sterkste tegenstander uit te schakelen; dat wil zeggen dat hij zijn pistool richt op *C*. Dit te meer, omdat, als *A* zijn pistool op *B* richt en hij erin slaagt *B* uit te schakelen, *C* daarna aan de beurt komt, die dan met zekerheid een eind aan het leven van *A* maakt.

Je pistool richten op een tegenstander in de hoop dat je mist, lijkt niet een verstandige keuze.

We mogen dus aannemen dat *A* zal proberen de sterkste tegenstander *C* uit te schakelen.

Bij de kanstheoretische analyse in de volgende paragrafen kunnen we, op grond van deze rationele overwegingen van de duellisten, uitgaan van de volgende strategieën.

In de situatie waarin alle drie duellisten nog in leven zijn (de eerste ronde) zal:

- *A* zijn pistool op *C* richten;
- *B* zijn pistool op *C* richten;
- *C* zijn pistool op *B* richten.

Nu we de optimale strategieën van de deelnemers bepaald hebben, kunnen we de bijbehorende overlevingskansen uitrekenen.

Het duel tussen twee tegenstanders

Op enig moment blijft er in het driehoeksduel een duel over tussen twee overlevenden. Uiteraard is een tweezijdig duel makkelijker te analyseren dan het duel met drie schutters. In deze paragraaf gaan we na hoe het duel tussen twee deelnemers verloopt.

We bekijken het duel tussen *A* en *C*, het duel tussen *B* en *C* en in een aparte paragraaf het duel tussen *A* en *B*.

Voor het duel tussen *A* en *C* noteren we de (*tweezijdige*) overlevingskansen van *A* als $p_{AC}(A)$ indien *A* het eerste schot mag lossen. Als *C* in dit duel de eerste schutter is, dan schrijven we de overlevingskansen van *A* als

$p_{CA}(A)$.

De index bij de kans p verwijst dus naar de *volgorde* in het *tweezijdig* duel. Voor de andere duels en deelnemers gebruiken we eenzelfde notatie.

We bespreken eerst de duels waarbij C is betrokken. De kansen bij deze duels zijn namelijk eenvoudig te berekenen, omdat C met zekerheid raak schiet. In een tweezijdig duel waarbij C is betrokken, zullen er namelijk nooit meer dan twee schoten worden gelost.

Het duel tussen A en C

Dit is, zoals gezegd, een eenvoudig duel.

Aangezien C met zekerheid treft, geldt:

$$p_{CA}(C) = 1 \quad \text{en} \quad p_{CA}(A) = 0$$

We gaan ook gemakkelijk na dat, als A begint, de overlevingskansen gegeven worden door:

$$p_{AC}(A) = \frac{1}{3} \quad \text{en} \quad p_{AC}(C) = \frac{2}{3}$$

Het duel tussen B en C

Dit is ook een eenvoudig duel. Uiteraard geldt:

$$p_{CB}(C) = 1 \quad \text{en} \quad p_{CB}(B) = 0$$

Voor de omgekeerde volgorde geldt, zoals we gemakkelijk kunnen nagaan:

$$p_{BC}(B) = \frac{2}{3} \quad \text{en} \quad p_{BC}(C) = \frac{1}{3}$$

Het enige interessante duel is het duel tussen A en B . Dit duel kan zich namelijk over meerdere ronden uitstrekken. Dat maakt het moeilijker om de overlevingskansen van de deelnemers te bepalen.

Het duel tussen A en B

We berekenen eerst de overlevingskansen van A in het geval dat A het eerste schot lost. A overleeft dit als hij met zijn eerste schot B treft; de kans hierop is $\frac{1}{3}$.

Mist A in zijn eerste beurt, dan overleeft hij alsnog als B op zijn beurt ook mist en hij daarna met zijn tweede schot B uitschakelt.

De reeks schoten is hier dus:

(A mist, B mist) A treft

De kans op deze reeks is: $(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$.

Mist A ook in zijn tweede beurt, dan zal B op zijn beurt ook weer moeten missen. A overleeft dan weer als hij daarna B uitschakelt. Dit correspondeert met de reeks: (A mist, B mist) (A mist, B mist) A treft

De kans hierop is: $(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$.

Dit patroon herhaalt zich na iedere misser van A . Een treffer in de derde beurt van A heeft een kans die gelijk is aan:

$$(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3}$$

De kans dat A op enig moment raak schiet, en dus overleeft, is gelijk aan:

$$\frac{1}{3} + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3})^2 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3})^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots$$

We vinden voor de overlevingskansen van A in dit duel:

(1)...

$$p_{AB}(A) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{9})^2 \cdot \frac{1}{3} + (\frac{2}{9})^3 \cdot \frac{1}{3} + \dots$$

Halen we in (1) de factor $\frac{1}{3}$ buiten haakjes, dan krijgen we:

(2a)...

$$p_{AB}(A) = \frac{1}{3} \cdot (1 + \frac{2}{9} + (\frac{2}{9})^2 + (\frac{2}{9})^3 + \dots)$$

We herkennen hierin de som van (de termen van) een meetkundige rij. De onderhavige kansverdeling heet naar aanleiding hiervan ook de *geometrische verdeling*. Voor de som van de termen van een meetkundige rij geldt de bekende formule:

(3)...

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad (\text{met } 0 \leq r < 1)$$

Met $r = \frac{2}{9}$ in (3) vinden we nu uit (2a):

$$(2b) \dots p_{AB}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{9}}$$

De overlevingskansen van A in dit duel met B is dus: $p_{AB}(A) = \frac{3}{7}$.

Dit geeft voor de overlevingskansen van B :

$$p_{AB}(B) = \frac{4}{7}$$

De overlevingskansen $p_{BA}(A)$ en $p_{BA}(B)$ kunnen op een zelfde wijze worden berekend. De lezer gaat gemakkelijk na dat:

$$p_{BA}(A) = \frac{1}{7} \quad \text{en} \quad p_{BA}(B) = \frac{6}{7}$$

Met behulp van de resultaten van de onderlinge duels kunnen we nu de overlevingskansen uitrekenen van het driehoeksduel. Alvorens dit te doen, presenteren we nog een alternatieve methode voor de berekening van de overlevingskansen van A en B in hun onderling duel.

Het duel tussen A en B revisited

A overleeft in het onderling duel als hij met zijn eerste schot B treft (kans = $\frac{1}{3}$). Als hij mist, dan moet B op zijn beurt ook missen. Deze kans is, zoals we gezien hebben, gelijk aan $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$. Na de twee missers is A weer aan de beurt en begint het duel met A aan

zet weer opnieuw. De kans dat A vanaf dit moment overleeft is gelijk aan $p_{AB}(A)$. Voor de overlevingskansen van A vinden we dus de volgende relatie:

$$(4) \dots p_{AB}(A) = \frac{1}{3} + (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}) \cdot p_{AB}(A)$$

Herschikking in (4) geeft:

$$(1 - \frac{2}{9}) \cdot p_{AB}(A) = \frac{1}{3}, \quad \text{waaruit volgt dat:}$$

$$(5) \dots p_{AB}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7}$$

En dit is in overeenstemming met het resultaat dat we in de vorige paragraaf gevonden hebben.

De overlevingskansen $p_{BA}(A)$ kan op deze wijze ook eenvoudig worden bepaald. Als A overleeft met B als eerste schutter, dan moet de eerste poging van B een misser zijn (kans = $\frac{1}{3}$). Daarna ontstaat een duel tussen A en B waarin A het eerste schot lost. In dit duel is zijn overlevingskans $p_{AB}(A)$. Er geldt dus:

$$(6) \dots p_{BA}(A) = \frac{1}{3} \cdot p_{AB}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

De hier gepresenteerde methode vermijdt het gebruik van de meetkundige rij.

Het driehoeksduel

We zijn nu toegerust om het driehoeksduel te analyseren. De overlevingskansen van de drie deelnemers aan dit duel noteren we als $P(A)$, $P(B)$ en $P(C)$.

Het is bij dit soort opgaven altijd aardig om zelf een inschatting te maken van de overlevingskansen.

Wat zegt de intuïtie van de lezer over deze kansen? Welke duellist heeft de grootste en welke duellist heeft de kleinste overlevingskansen?

We berekenen eerst de **overlevingskansen**

van A. Op basis van de eerder besproken rationaliteitsoverwegingen kunnen we ervan uitgaan dat A in zijn eerste poging probeert C uit te schakelen. Er zijn dan twee mogelijkheden:

- ofwel A schakelt C uit, waarna er een duel tussen A en B overblijft;
- of A mist C , waarna er al naar gelang B in zijn beurt C uitschakelt, een duel tussen A en B of tussen A en C overblijft.

A schakelt in de eerste beurt C uit.

Als A bij zijn eerste beurt C uitschakelt – de kans hierop is $\frac{1}{3}$ – dan resteert een duel

tussen A en B waarin B begint. De overlevingskans van A is in dit scenario:

$$(7) \dots \frac{1}{3} \cdot p_{BA}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$$

A mist C in de eerste beurt ...

Als A in zijn eerste beurt mist (kans = $\frac{2}{3}$), dan is daarna de beurt aan B . B zal op grond van de rationaliteitsoverwegingen proberen C uit te schakelen. Er zijn dan weer twee mogelijkheden die we hieronder bespreken.

... en B schakelt C uit.

Als B erin slaagt C uit te schakelen (kans = $\frac{2}{3}$), dan ontstaat er een duel tussen A en B met A aan zet. De kans dat A overleeft, is in dit geval:

$$(8) \dots \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{21}$$

... en B mist C .

Als B in zijn poging om C uit te schakelen faalt, dan zal C op zijn beurt B uitschakelen, waarna A weer aan de beurt is. A overleeft dan alleen als hij in zijn tweede beurt C uitschakelt. De overlevingskans van A is in dit geval:

$$(9) \dots \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_{AC}(A) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{4}{21}$$

Combinatie van de kansen in (7), (8) en (9) geeft de overlevingskans $P(A)$ van A :

(10)...

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot p_{BA}(A) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot p_{BA}(A) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_{AC}(A)$$

Invullen van de waarden van de tweezijdige overlevingskansen in (10) geeft dan:

(11)...

$$P(A) = \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{2}{27} = \frac{59}{189} \approx 0,312$$

Duellist A heeft ongeveer **31%** kans om als winnaar uit de strijd te komen.

We berekenen nu de **overlevingskans van B** . We onderscheiden weer twee gevallen.

A schakelt in zijn eerste beurt C uit.

Als A in zijn eerste beurt C uitschakelt, dan resteert er een duel tussen A en B waarin B begint. De overlevingskans van B in dit duel is gelijk aan $p_{BA}(B)$.

Schakelt A de sterke tegenstander C uit, dan overleeft B met een kans gelijk aan:

$$(12) \dots \frac{1}{3} \cdot p_{BA}(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{7}$$

A mist in zijn eerste beurt C .

Als het A niet lukt de gevaarlijke tegenstander C uit te schakelen, dan moet B om te overleven in zijn beurt C uitschakelen, waarna er een duel resteert tussen A en B met A als eerste schutter. De overlevingskans voor B is nu:

$$(13) \dots \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(B) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{7} = \frac{16}{63}$$

Combinatie van de kansen in (12) en (13) geeft de overlevingskans van B :

$$(14) \dots P(B) = \frac{1}{3} \cdot p_{BA}(B) + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(B)$$

Invullen van de waarden van de tweezijdige overlevingskansen in (14) geeft:

$$(15) \dots P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{34}{63} \approx 0,540$$

B heeft dus een overlevingskans van ongeveer **54%**.

Met de overlevingskansen van A en B is ook die van C bepaald:

$$P(C) = 1 - \frac{59}{189} - \frac{34}{63} = \frac{28}{189} = \frac{4}{27} \approx 0,148$$

C heeft dus een overlevingskans van ongeveer **15%**.

Ter controle berekenen we de overlevingskans $P(C)$ van C nog even op de wijze waarop we ook de andere overlevingskansen hebben berekend.

Opdat C overleeft, moeten zowel A als B in eerste ronde missen, waarna er een duel overblijft tussen A en C met A aan zet (B wordt immers door C omgelegd). De overlevingskans van C is dus:

$$(16) \dots P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot p_{AC}(C)$$

Invullen van de tweezijdige overlevingskansen in (16) geeft:

$$(17) \dots P(C) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

Samenvattend kunnen we dus zeggen:

Onder de rationaliteitsaannames zijn de overlevingskansen van de duellisten A , B en C respectievelijk 31%, 54% en 15%.

De lezer kan nu deze berekende waarden vergelijken met zijn of haar (eerdere) intuïtieve inschatting van de kansen. Uit de kansen blijkt (verrassend?) dat de beste schutter C de kleinste overlevingskans heeft. Blijkbaar weegt het feit dat hij pas als derde aan de beurt komt en dat de beide anderen het op hem gemunt hebben, nogal zwaar.

Een paradox?

Bij de rationaliteitsoverwegingen hebben we gezien dat, als A in de eerste beurt zijn pistool op B richt, hij met een treffer zijn eigen doodvonnis tekent. Opzettelijk missen is hier dus verstandiger dan een gericht schot lossen. Daarom leek het verstandig voor A om eerst te proberen C uit te schakelen. Wat nu als A denkt dat eenzelfde strategie ook ten aanzien van C verstandig is? Dat wil zeggen: ook in het eerste duel met C opzettelijk missen.

Hoe verandert de overlevingskans van A in dit geval? In dit deel rekenen we dat voor

A even uit. We gaan nu dus uit van de volgende rationaliteit(?).

In een situatie waarin de drie duellisten nog in leven zijn, zal:

- A met opzet in de grond schieten;
- B zijn pistool op C richten;
- C zijn pistool op B richten.

In deze situatie komt B dus als het ware als eerste aan de beurt, terwijl A en C nog in leven zijn. We (her)berekenen de overlevingskans $P(A)$ van A .

B schakelt in zijn beurt C uit.

Als B in zijn beurt C uitschakelt, resteert een duel tussen A en B waarbij A het eerste schot lost. De overlevingskans van A in dit duel is dan gelijk aan $p_{AB}(A)$. De overlevingskans van A is in dit geval dus:

$$(18) \dots \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(A)$$

B mist in zijn beurt C .

Als B in zijn beurt C mist, dan zal C daarna B uitschakelen, waarna een duel overblijft tussen A en C met A aan zet. De overlevingskans van A in dat duel is dan $p_{AC}(A)$. Hieruit volgt dat de overlevingskans van A in deze situatie gelijk is aan:

$$(19) \dots \frac{1}{3} \cdot p_{AC}(A)$$

Door combinatie van (18) en (19) vinden we de overlevingskans van A onder de aanname dat hij opzettelijk mist in zijn eerste beurt.

$$(20) \dots P(A) = \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(A) + \frac{1}{3} \cdot p_{AC}(A)$$

Invullen van de tweezijdige overlevingskansen in (20) geeft:

$$(21) \dots P(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{25}{63} \approx 0,397$$

Deze strategie geeft A een overlevingskans van ongeveer 40%. Door opzettelijk te missen kan A zijn overlevingskans met ongeveer 9% hogen. Dit gaat uiteraard ten koste van de kansen van B en C .

In hoeverre dat het geval is, gaan we hieronder na.

We bereken eerst de overlevingskans $P(B)$ van B . We onderscheiden weer twee gevallen.

B schakelt C uit.

Bij deze strategie van A komt B , zoals gezegd, als het ware als eerste aan de beurt. Als B in deze beurt C uitschakelt, dan resteert een duel tussen A en B waarbij A als eerste de trekker mag overhalen. De overlevingskans van B in die ronde is $p_{AB}(B)$. De overlevingskans van B is in dit geval dus:

$$(22) \dots \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(B)$$

B mist C.

Als B er niet in slaagt C uit te schakelen, dan heeft hij daarmee zijn eigen doodvonnis getekend: zijn overlevingskans is gelijk aan 0.

Onder de nieuwe strategie van A is de overlevingskans van B gelijk aan:

$$(23)\dots P(B) = \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(B) + 0 = \frac{2}{3} \cdot p_{AB}(B)$$

Invullen van de tweezijdige overlevingskans in (23) geeft:

$$P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{21} \approx 0,381$$

De overlevingskans van B is nu dus ongeveer 38%. Dat laat voor C een overlevingskans van ongeveer 22% (de lezer kan dit ter controle nog narekenen).

Door in de grond te schieten heeft A niet alleen zijn overlevingskans met 9% vergroot, hij heeft nu ook nog de grootste overlevingskans van de drie duellisten. 'Niet schieten' of – wat op hetzelfde neerkomt – 'expres mis schieten' is de beste strategie voor A .

Een kans voorbij laten gaan om een tegenstander uit te schakelen om daarmee je overlevingskans te vergroten heeft toch wel iets weg van een paradox.



Bron: [2], pag. 188

Nawoord

De optimale strategie voor A lijkt op het spreekwoord 'Als twee honden vechten om een been, gaat de derde er mee heen.'

Voor een zwakke partij is het hier verstandig zich niet direct in de strijd te mengen, maar eerst het duel tussen de sterkere tegenstanders af te wachten. Een fenomeen dat zich in de oorlogsvoering ook wel voordoet. Ravi Vakil presenteert in zijn boek in dit verband een spotprent waarin Napoleon III met genoegen het 'duel' tussen de Oostenrijkers en de Pruisen aanziet in de Oostenrijks-Pruisische oorlog van 1866.

Literatuur

- [1] W. Feller (1968): *Introduction and Application of Probability Theory*. New York: Wiley & Sons.
- [2] R. Vakil (1996): *A Mathematical Mosaic / Patterns and Problem Solving*. Ontario: Brendan Kelly Publishing Inc.

Over de auteur

Rob Bosch is universitair hoofddocent wiskunde aan de Nederlandse Defensie Academie en lid van de redactie van *Euclides*.
E-mailadres: robbosch@live.nl

Leuk voorbeeld nodig?

Opfrissen of bijscholen?

Toepassingen van wiskunde?

Nu is er Wiskunde in Werking: van A naar B!

Een bijzonder inspirerend boek voor velen: eerstejaars studenten met wiskunde A die nu voor een exacte richting kiezen, studenten met wiskunde B die wat willen opfrissen, docenten op zoek naar verdieping of een origineel voorbeeld, en alle anderen met belangstelling voor toepassingen van wiskunde.

Deze tekst behandelt de basis van de "calculus". De stof wordt zo aangeboden dat de praktische bruikbaarheid zo groot mogelijk is; er wordt veel aandacht besteed aan het bestuderen van concrete voorbeelden uit diverse vakgebieden en het maken van oefeningen. Daarnaast wordt de stof zoveel mogelijk geïllustreerd aan de hand van toepassingen, waarbij de verbinding tussen de wiskunde en de toepassing zeker zo belangrijk is als de wiskunde zelf.

Deel 70

Wiskunde in Werking: van A naar B

M. de Gee

480 blz. (kleur), €34,-

ISBN 978-90-5041-127-1



Epsilon Uitgaven

bestellen bij boekhandel of via www.epsilon-uitgaven.nl

Biljarten op een ellips

ALTIJD RAAK!

[Pauline Vos]



In een Amsterdams project^[1] is een 'wiskundige leskist' gemaakt bestaande uit een draagbare biljarttafel met twee ballen en een keu. Het bijzondere is dat het biljart *ellipsvormig* is. Dit heeft een ook bijzonder effect: als je in elk brandpunt een bal zet, dan kun je de ene bal via de band stoten en dan zal hij na het terugkaatsen altijd de andere bal raken. Altijd raak! Het probleem is alleen: waar liggen de brandpunten?

Voor klassen 3 en 4 havo/vwo is een lesbrief gemaakt waarmee de leerlingen kennis maken met eigenschappen van de ellips-brandpunten. Ze bewijzen daarbij een stelling over de brandpuntsafstand. Benodigde voorkennis: de stelling van Pythagoras.

Voor de bovenbouw is de lesbrief nog in ontwikkeling – daarin zullen leerlingen met technieken uit de analytische meetkunde (uit wiskunde B en wiskunde D) enkele stellingen over ellipse-eigenschappen bewijzen.

Tijdens de experimenten merkten we dat de leerlingen niet van het biljart kunnen afblijven en dat de kennismaking met de woorden *ellips* en *brandpunt* blijvend is. Nog weken later praten ze erover! Maar de doelen van dit ellipsbiljart gaan natuurlijk verder dan woordjes leren. We willen graag dat leerlingen leren dat je eigenschappen van vormen kunt omzetten naar formules en dat formules een manier zijn om meetkundige relaties vast te leggen. Dus:

meetkunde ↔ algebra

Ofwel: van tastbare dingen naar symbolentaal, en weer terug. Ofwel: het algebraïseren van vormen en het betekenis geven aan en interpreteren van formules.

In de lesbrief voor de onderbouw starten we met redeneren vanuit het touwtje dat aan twee punaises is geknoopt (*zie figuur 1*). In de praktijk in de klas worden het slordige ellipsen. Maar op YouTube^[2] zijn illustratieve filmpjes te vinden met de zoekwoorden *ellipse draw string*.

Als de lengte van de halve lange as gelijk is aan a is, dan kun je laten zien dat de lengte van het touwtje het dubbele hiervan is (*zie weer figuur 1*). Je moet dan de potloodpunt op de lange as zetten en redeneren over de lengte van het stuk waarop het touw dubbel ligt.

Als je het potlood over de ellips naar de korte as beweegt, dan kun je een gelijkbenige driehoek herkennen; zelfs twee (*zie figuur 2*). Er geldt dan: als $c = d$, dan is $c = d = a$ en dus ook: $c + d = 2a$.

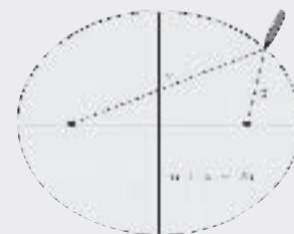
Als a de halve lange as is, b de halve korte as en p de halve brandpuntsafstand (*zie figuur 3*), dan volgt met de stelling van Pythagoras: $c^2 = b^2 + p^2$ en ook $d^2 = b^2 + p^2$ en ook $a^2 = b^2 + p^2$.

Hieruit volgt de 'stelling van Pythagoras voor ellipsen': $a^2 - b^2 = p^2$.

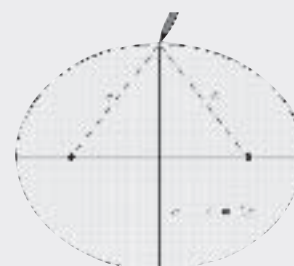
Het doel van het ellipsbiljart is dus om te leren dat je vormen naar formuletaal kunt vertalen (en weer terug). Zoals leerlingen dit al hebben gezien bij de stelling van Pythagoras: de vorm van een rechthoekige driehoek (meetkunde) wordt vertaald naar de kwadraten van de zijden (algebra). Bij de ellips leiden we een andere, maar wel soortgelijke formule af, namelijk voor de halve brandpuntsafstand en de halve lengtes van lange en korte as. Dus:

meetkunde ↔ algebra

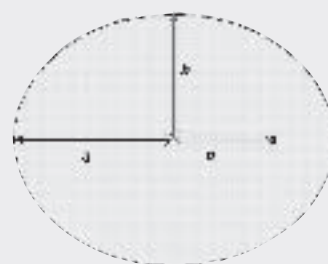
En nu praktisch. U kunt het ellipsbiljart afhalen bij de ITS Academy en voor een week voor uw school lenen. Een en ander kan dan gebruikt worden in diverse klassen. Het ellipsbiljart is zodanig ontworpen dat het achterin een auto past. Het wordt geleverd in een *flightcase* met een apart 'hondje', zodat het makkelijk verreden kan worden.



figuur 1



figuur 2



figuur 3 $a^2 - b^2 = p^2$

Met dank aan een 3-vwo klas van de Christelijke Scholengemeenschap Jan Arentsz Alkmaar. En ook dank aan wiskunde-docent Mikaël Flens van die school en aan Bart Groeneveld van ITS Academy voor hun commentaar bij dit artikel.

Noten

[1] ITS Academy is een samenwerking van vo-scholen in de Amsterdamse regio en UvA, VU, HvA en Inholland. De leskist is te bestellen via:

« www.ITSAcademy.nl/leskisten ».

[2] Zie: www.youtube.com

Over de auteur

Pauline Vos was wiskundelerares en werkt nu als lerarenopleider en onderzoeker.

E-mailadres: fpvos@hotmail.com

WisSter en Smartphone

DÁT KAN WEL IN DE KLAS!

[Lauran van Oers]

Ruim tien jaar ben ik nu bezig met de toepassing en ontwikkeling van mijn computer-programma WisSter. Een aantal collega's kent deze software wellicht al van een publicatie of een workshop. De belangrijkste kenmerken zet ik hieronder voor u op een rijtje.

Doel

WisSter wordt op school, tijdens de les, door de leerlingen gebruikt om zo effectief mogelijk van en met elkaar te leren. Voor de docent is het programma een handig middel om ieders tempo en (huis)werk te controleren. En omdat WisSter meetelt als cijfer, wordt bespaard op de tijd die nodig is voor het samenstellen en corrigeren van so's. De gebruikelijke toetsen gaan naast WisSter gewoon door en regelmatig wordt ruimte gemaakt voor de broodnodige klassikale uitleg. In principe is WisSter bruikbaar voor alle richtingen en niveaus. Op onze school is er uitgebreid mee gewerkt in alle bovenbouwgroepen van havo en vwo en in een enkele onderbouwgroep. Zelfs kan het programma, met de juiste databases, bij andere vakken worden toegepast. Een collega Duits heeft daar een aantal jaren positieve ervaringen mee in havo-3.

Praktijk

De klas wordt verdeeld in groepjes van 6, 7 of 8 leerlingen. Elk groepje hoort vast bij één van de 3 of 4 computers, die zó staan opgesteld (bijvoorbeeld achter in het lokaal) dat de leerlingen er 'privé' aan kunnen werken. Per hoofdstuk wordt een werkschema afgesproken met een duidelijke 'deadline'. Zodra een leerling een paragraaf af heeft, gaat hij of zij met alleen het schrift en de (grafische) rekenmachine naar de computer, tikt een persoonlijke toegangscode, hoofdstuk- en paragraafnummer in en krijgt dan een testje over de paragraaf voorgeschoteld dat bestaat uit (bijvoorbeeld) een drietal vragen. Die vragen wandelen van voor naar achter door de paragraaf en moeten binnen een vastgestelde tijd (bijvoorbeeld 4 minuten) beantwoord worden aan de hand van wat er in het schrift staat. Het gaat daarbij niet om eindantwoorden die zo van het antwoordblad kunnen worden overgeschreven, maar om tussenberekeningen, inzicht, extra oefening over zaken die vaak fout gaan en een enkele theorievraag. Wat in het schrift staat moet daarom compleet en van een behoorlijke

kwaliteit zijn en de leerling moet begrijpen waar het over gaat.

Testvragen

Omdat, zoals gezegd, het testje maar een paar minuten duurt, zijn de vragen kort en moet er een eenduidig antwoord op gegeven worden. Meestal is dit een getal, maar het kan ook een woord zijn of er moet op de juiste plaats in een plaatje geklikt worden. Indien nodig kunnen meerdere antwoorden goed gerekend worden. Een voorbeeld van een testvraag (havo-4, wiskunde A, exponentiële groei) staat *in figuur 1a* (op pag. 158). De bijbehorende opgave in het boek staat *in figuur 1b*. In de database ziet de vraag er als volgt uit.

26. Repetitievraag. Bij een groeifactor van (*1.02, 1.05, 1.08, 1.11, 1.14, 1.17, 1.2, 1.23*) per dag hoort een verdubbelingstijd van dagen. Welk getal staat op de puntjes (1 decimaal)?
Antwoord: (*35.0, 14.2, 9.0, 6.6, 5.3, 4.4, 3.8, 3.3*)

Bij het stellen van deze vraag kiest WisSter random één van de getallen 1.02 tot en met 1.23 (hier 1.11) en controleert het bijbehorende antwoord (6.6).

Testresultaat

De WisSter-test kan voor een leerling op twee manieren aflopen. Als je de vragen alle drie goed beantwoord hebt, ben je 'geslaagd' en WisSter belooft je prestatie met een 'sterretje' voor die paragraaf. Dat wordt later in een cijfer verwerkt. Lukken de vragen niet allemaal, dan ben je 'af' en ga je terug naar je plaats, zodat de anderen van je groepje aan de beurt kunnen komen. Maar, zodra de computer weer vrij is, mag je gaan herkansen en dat kun je blijven doen, tot de deadline van het hoofdstuk verstreken is. Dit is voor de leerlingen erg inspirerend en in feite het 'warm kloppend hart' van het programma. Er is immers een behoorlijke kans dat je de vraag waarover je struikelde, bij een volgende beurt nog

eens treft en ook je medeleerlingen kunnen die zelfde vraag krijgen. Alle reden dus om met elkaar te bespreken wat er fout gegaan is. En kom je er samen niet uit, dan stap je naar de docent. Die kan met de computer op zijn of haar bureau het logboek van WisSter openen, al je vragen, antwoorden en resultaten bekijken en het probleem met je bespreken.

Ontwikkeling

In de loop der jaren zijn allerlei mogelijkheden aan WisSter toegevoegd die uitnodigen tot nóg efficiënter samen leren. Een paar voorbeelden.

- WisSter bevat een 'alternatiefgenerator', dat wil zeggen een mogelijkheid om van een vraag met een rekentechnisch probleem, zoals die van het voorbeeld hierboven, automatisch een aantal varianten te maken. Een volgende leerling kan daardoor wel dezelfde vraag krijgen, maar meestal bevat die dan andere getallen. Men moet dus weten 'hoe het moet' in plaats van 'wat de uitkomst is'.
- De docent kan met het ingebouwde logboek en de statistische mogelijkheden van WisSter op elk moment de vorderingen en prestaties van elke leerling inzien. Als een leerling bijvoorbeeld zeven keer zonder succes een paragraaf herkanst, dan wordt het tijd voor een 'gesprekje' over de kwaliteit van het werk in het schrift.
- Als een leerling 'af' is, dus niet alle testvragen binnen de vastgestelde tijd goed beantwoordde, verschijnt op het scherm een lijstje met namen van leerlingen die de vraag, waarover gestruikelde, al eerder wél goed hadden. Via deze 'Tip' weet je dan bij wie je om advies kunt gaan. De meeste leerlingen werken hier graag aan mee. Het bespaart immers een heleboel heen en weer gevraagd en komt het een keer niet uit, dan is er altijd de docent nog.

Internet en Smartphone

Al enige jaren heeft WisSter de ingebouwde mogelijkheid om behaalde resultaten na elke 'computerbeurt' onmiddellijk te uploaden. Leerlingen kunnen op die manier thuis en op school, door het intikken van

een persoonlijke code, via internet hun 'sterrenstand' bekijken. Sinds vorig jaar wordt op de betreffende internetpagina ook de inhoud van de hierboven genoemde Tip vermeld, een welkome aanvulling als je thuis of in een vrij uur een en ander nog eens bekijken wilt.

Onlangs is deze voorziening verder uitgebreid. Behalve de resultaten en de Tip wordt nu ook de tekst van de laatste (onjuist beantwoorde) vraag vermeld, inclusief het gegeven foute antwoord. En dit alles mag in de klas, tijdens de les, op de smartphone binnengehaald worden om te bekijken en met elkaar te bespreken. De winst die geboekt wordt is, dat je nu precies weet hoe de vraag luidde, waardoor het 'sterretje' niet gehaald werd. Dat ziet er dan als **in figuur 2**.

Hoera! De smartphone is geïntegreerd in de wiskundeles! Een welkome aanvulling! Voor de volledigheid: het cijfer 3 in de tweede regel van het smartphone-scherm geeft aan dat deze leerling (vwo-6, wiskunde D) over paragraaf 2 tot nu toe 3 mislukte pogingen gedaan heeft. En de uitdrukking 'af t/m:23' betekent dat hij of zij op dat moment het hoofdstuk tot en met opgave 23 af heeft.

Uiteraard is het bij het invoeren van iets nieuws altijd de vraag hoe het op den duur zal gaan uitpakken. Dat weet ik dus nog niet, maar de eerste ervaringen zijn positief. Bijna elke leerling, zeker in de bovenbouw, beschikt over een smartphone en ik hoor voortdurend dat er stevig gediscussieerd wordt over de informatie die op de kleine schermpjes verschijnt. Ik heb ook niet de indruk dat de smartphone onder de wiskundelessen nu teveel voor andere zaken gebruikt wordt. Daar was ik toch al niet zo bang voor, want tijdens de lessen met WisSter hebben de meeste leerlingen al hun tijd nodig om op tempo te blijven. En, zoals hierboven beschreven werd, achterlopen valt onmiddellijk op. Bij een eerste navraag gaven

de leerlingen voor deze WisSter/smartphone-combinatie een gemiddeld waarderingscijfer van 7,8. Daar kan ik mee leven!

En verder

In 2010 en 2011 heb ik (voor het eerst) op onze school de examenresultaten van de leerlingen die de laatste twee jaar van hun opleiding consequent met WisSter werkten vergeleken met de examenresultaten van de leerlingen die het programma niet gebruikten. Het betrof de vakken wiskunde B in havo-5 en wiskunde A en C in vwo-6. Met mijn berekeningen heb ik de directie van onze school en mijn wiskundecollega's ervan kunnen overtuigen dat, volgens dit beperkte onderzoek, de WisSter-gebruikers in beide jaren significant beter scoorden op het cse. Desondanks komt de toepassing van het programma niet echt op gang: slechts een paar collega's maken er gebruik van. Merendeels liggen allerlei praktische oorzaken daaraan ten grondslag. Zo hebben, vanwege het grote aantal deeltijders, maar weinig collega's een eigen lokaal. Dat geeft uiteraard problemen als je elke les over vier (werkende) computers moet kunnen beschikken. Verder gaan niet alle docenten even gemakkelijk om met ict-apparatuur en het samenstellen en bijhouden van de databases met vragen kost uiteraard wat extra tijd. Jammer, want de leerlingen werken graag met WisSter en stellen de positieve invloed van het programma op hun resultaten zeer op prijs.

Tot slot

Kirsten, één van mijn examenleerlingen vwo-6, wiskunde C, maakte tijdens het afgelopen cursusjaar een paar keer min of meer terloops de opmerking 'WisSter heeft mij gered'. Tijdens de diploma-uitreiking vroeg ik haar wat ze daar nu precies mee bedoeld had. Ze bood aan om dat samen met haar vriendin Lisa (uit mijn examen-groep vwo-6, wiskunde A) op papier te

zetten. Een paar dagen later ontving ik, per e-mail, onderstaand verhaal.

Na zes jaar op het Rijks te hebben gezeten kunnen wij wel zeggen dat leerlingen er over het algemeen alles aan doen om onder hun huiswerk uit te komen. De eeuwige toespraken van leraren die ons ervan verzekeren dat je het vak onmogelijk kan halen als je je huiswerk niet goed bijhoudt, gaan vaak het ene oor in en het andere oor uit omdat je, zonder je opdrachten en huiswerk te maken, toch een zesje staat voor het vak. Met als gevolg dat huiswerk vaak overgeschreven, afgeraffeld of simpelweg niet gemaakt wordt. En zelfs een beetje strafwerk schrikt veel leerlingen daar niet voor af. Het enige dat ik als een effectief (dreig)middel heb ondervonden zijn slechte cijfers. Zodra geen of slecht gemaakt huiswerk een onvoldoende als direct gevolg heeft, blijkt iedereen verassend genoeg opeens wel hun huiswerk in orde te hebben. Het sterretjes-systeem is daarom een hele goede methode om leerlingen consequent hun huiswerk bij te laten houden, het niet behalen van sterretjes leidt immers tot een onvoldoende als so-cijfer. Overschrijven heeft geen zin meer, omdat je geen sterretjes kan halen als je de vragen en de antwoorden niet goed snapt. Zonder je opdrachten te maken, na te kijken, je fouten te snappen, en bij te blijven met het schema heb je tevens geen kans op het behalen van een sterretje.

En uiteindelijk blijken leraren toch gelijk te hebben met hun toespraken en zorgt het maken van je opdrachten toch wel degelijk voor betere beheersing van de stof en dus voor betere cijfers voor proefwerken. Bovendien zorgen de sterretjes ervoor dat je meerdere keren over de opdrachten in het boek nadenkt zodat de stof langer en beter blijft hangen omdat je er meer mee bezig bent geweest, en houden de sterretjes leerlingen gemotiveerd om in de lessen hard

**Zie
26**

Regeltijvraag.
 Bij een groeifactor van 1,11 per dag hoort een verdubbelingstijd van dagen.
 Welk getal staat op de punten (1 decimaal)?

26 Bij een groeifactor van 1,15 per dag hoort een verdubbelingstijd van 4,96 dagen. In het voorbeeld hierboven is die verdubbelingstijd berekend via het oplossen van de vergelijking $1,15^x = 2$. Bereken nu op dezelfde manier de verdubbelingstijden bij de volgende groeifactoren.

groeifactor per dag	1,15	1,10	1,06	1,03
verdubbelingstijd (dagen)	4,96	...	...	...

figuur 1a

figuur 1b



figuur 2

te werken omdat ze elke les een doel voor ogen hebben ('deze les *moet* ik mijn derde sterretje halen!') en omdat ze voor hard werken direct beloond worden met een sterretje en daarmee een goed so-cijfer. Wij zijn in ieder geval erg blij dat we de afgelopen twee jaar met het sterretjes-systeem hebben kunnen werken en wij geloven dat wij onze goede cijfers voor wiskunde daar voor een deel aan te danken hebben.

Lisa & Kirsten



Over de auteur

Lauran van Oers is wiskundedocent op R.S.G. 't Rijks in Bergen op Zoom.

E-mailadres: Lvanoers@hotmail.com

Website: www.wisser.nl

Errata in Euclides 87(3)

In nummer 87(3) van *Euclides* (het december-nummer) staan op pagina 94 enkele onjuistheden.

In de linker kolom moet op de 4e regel van de wenskaart het getal 258 veranderd worden in 285.

En voorts is het e-mailadres van Job van de Groep onjuist (rechter kolom, onderaan); dat moet luiden:

jvdgroep@planet.nl

Uiteraard onze excuses.

APS-Exact

Maandag 13 februari 2012

Maandag 9 maart 2012

Donderdag 8 maart 2012

Vrijdag 16 maart 2012

Maandag 19 maart 2012

Ook in het schooljaar 2011-2012 organiseert APS-Exact diverse cursussen en studiedagen, zoals:

Studiedag De grote rekenwettenschouw

Studiedag Rekenen in het vo getoetst

Bijeenkomst Leerlingen rekenvoordiger met SolVO

Start cursus Hoogbegaafde leerlingen in de wiskunde

Studiedag Rekenproblemen

U kunt zich aanmelden via onze site
www.aps.nl/exact > Activiteitsagenda

informatie

Bel of schrijf voor meer informatie:

APS-Exact

Postbus 85475

3508 AL Utrecht

Tel.: 030 - 28 56 722

voortgezetonderwijs@aps.nl

www.aps.nl/exact



leren
inspireren

Het oplossen van lineaire vergelijkingen

[Ellen Vroegindewei en Frans Ballering]

Ik werk met een tweede klas havo, waarin leerlingen zitten die afkomstige zijn uit verschillende brugklassen (vwo, havo, vmbo). Het is nodig om in een rustig tempo, met veel herhaling en nadruk op begrijpen, de leerlingen te laten zien dat de balans-methode nuttig is om antwoord te krijgen op een concrete vraag.

Een eerste voorbeeld

Aan het begin van het hoofdstuk eerst maar eens oude kennis ophalen. Ik begin zelf met een miniverhaaltje:

Er is volgende week een feestavond op school, de entree is € 2,00 en voor elke drankje betaal je € 0,50.

De vragen daarbij worden dan: Wat ben je kwijt als je vier keer iets drinkt? Wat betaal je als je niets drinkt? Enzovoort.

Samenvatten en meer voorbeelden

Wat is nu een handige manier van opschrijven? Bij de meeste leerlingen komt dan het beeld naar voren dat ze van vorig jaar hebben: met een formule maak je steeds dezelfde berekening. Die formule beschrijft een verband. Bij de stap van woordformule naar letterformule gebeurt er niet echt iets wiskundigs, in de reken-didactiek noem je dit *verkorten*. Na nog enkele voorbeelden (mobieltje, bijbaantje), ook van leerlingen, wordt het de leerlingen steeds duidelijker hoe je een formule moet opstellen bij een miniverhaaltje.

Ik geef ook een non-voorbeeld. Stel je bent op die feestavond en er zijn verschillende prijzen voor de consumpties, kun je dan ook makkelijk een formule opstellen? Het beeld is datgene wat alle voorbeelden gemeenschappelijk hebben: een soort voorschrift voor hoe je moet rekenen.

Breng de leerling in actie

De volgende vraag is dan, nadat we twee formules hebben opgesteld die gaan over het bijbaantje van Piet en Jan: Na hoeveel uur werken hebben beiden evenveel verdiend? Ik laat de leerlingen eerst even uitzoeken (in tweetallen) hoe ze daarachter kunnen komen. De meest genoemde antwoorden uit de groep zijn: proberen, een tabel maken, de grafiek tekenen en dan kijken waar ze elkaar snijden.

Balans

Op dit moment schrijf ik een aantal formules op het bord (steeds twee die bij elkaar horen) en vraag ook aan de klas wat nu het meest handige is. De leerlingen komen er achter (door te proberen) dat het veel werk is om het steeds op hun eigen manier te doen. In de tussentijd heb ik een aantal balansen op het bord getekend met gewichtjes en blokjes. Op school hebben wij ook een balans met verschillende kleuren blokjes en gewichten. Op die manier introduceer ik de balansmethode.

Bij het uitleggen van de balansmethode werk ik heel duidelijk van concreet naar abstract. Ik maak gebruik van progressieve schematisering en de abstracte werkwijze is een verkorting van de eerste schematische.

concreet: het tekenen van een balans op het bord en het gebruik maken van een houten balans

schematisch: (de papieren balans)

$$\begin{array}{r} 3x + 3 = 19 + x \\ x \qquad \qquad x - \\ \hline 2x + 3 = 19 \\ 3 \qquad 3 - \\ \hline 2x = 16 \\ \div 2 \qquad \div 2 \\ \hline x = 8 \end{array}$$

abstract:

$$\begin{array}{l} 3x + 3 = 19 + x \\ 2x + 3 = 19 \\ 2x = 16 \\ x = 8 \end{array}$$

Samenvatting

Ik maak de leerlingen dus eerst duidelijk wat een formule is en wat een vergelijking. Dat doe ik met miniverhaaltjes, dus ik maak gebruik van actietaal, d.w.z. niet de wiskundetaal, maar de taal van de leerlingen. Ik gebruik voorbeelden die dicht bij de beleavingswereld van de leerlingen liggen, zodat het voor de leerlingen concreet is. Dit is de fase van de beeldvorming. Door het gebruik van veel voorbeelden ontstaat er bij de leerlingen begrip.

Lagerwerf^[1] heeft het ook over beeldvorming bij vergelijkingen. Hij begint (als ik mijn eigen voorbeeld van het bijbaantje gebruik) met het vergelijken van de twee lonen: bij welke winkel kun je beter gaan werken als

je alleen naar de verdiensten kijkt? Bij die vraag moeten de leerlingen uiteindelijk in staat zijn om naar een moeiteloze formele oplossing van de juiste lineaire vergelijking te komen.

Door veel voorbeelden te geven en te vragen ontstaat voor de leerling dit beeld van aanpak:

- telkens twee eenvoudige berekeningen die beginnen met hetzelfde woord (evenveel loon, hetzelfde aantal km, dezelfde kosten, enz.).

Het onder woorden brengen van de procedure is de afronding van de beeldvorming. Dan volgt de schematisering, een schema opstellen en uiteindelijk volgt de formalisering van het oplossingsproces van de vergelijking.

Daarbij moet je oppassen dat je niet te snel gaat met verkorten, want dan gaat de relatie met de werkelijkheid verloren.

Na een aantal opgaven (dat is per leerling verschillend) wordt het de leerlingen duidelijk dat ze steeds hetzelfde doen. Ze hoeven dan niet steeds helemaal terug naar de probleemsituatie, maar ze zien aan de vergelijking wát ze moeten doen.

Lagerwerf: *'Wilt u dat uw kinderen bruikbare wiskunde leren, dan zult u voortdurend heen en weer moeten pendelen tussen vergelijking en miniverhaaltjes.'*

Als je vanuit de context werkt en leerlingen veel zelf laat proberen en veel voorbeelden geeft, dan vinden leerlingen het op den duur vanzelfsprekend dat de notatie steeds korter en abstracter wordt. Zo leren ze vergelijkingen op te lossen met behulp van hun kennis van de realiteit.

Oefenen met inzicht

De leerlingen gaan nu veel oefenen in het oplossen van 'kale' vergelijkingen. Ik laat ze dat ook minimaal één les op de computer doen.

Een ander manier van oefenen is niet het oplossen van vergelijkingen: ik geef de oplossing en de leerlingen moeten er dan een vergelijking bij bedenken. In deze fase is het aanbrengen van variatie belangrijk om ervoor te zorgen dat het begrip niet verloren gaat omdat er zoveel dezelfde sommen gemaakt moeten worden en de automatische

Vanuit de A^o 1928 oude doos

[Ton Lecluse]

piloot wordt aangezet.

Andere mogelijke variaties zijn: geef een deel van de oplossing. Geef verschillende manieren. Laat leerlingen elkaars werk controleren. Laat leerlingen elkaar opgaven opgeven.

Noot

[1] B. Lagerwerf (1994): *Wiskunde-onderwijs in de basisvorming*. Groningen: Wolters-Noordhoff (heruitgave in 2000 door APS, Utrecht).

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw tot in de tweede wereldoorlog in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt.

Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen wiskunde op het vwo gemaakt moeten kunnen worden, wellicht met enige hulp of als kleine praktische opdracht. Mogelijk geeft een van de opgaven u een handvat om eens een opgave in zo'n vorm te ontwerpen!

Deze keer een relatief eenvoudige trigonometrische opgave en een constructie, beide uit 1928.

Wellicht vindt u het leuk om de opgave eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgave wel te doen voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.

Verderop treft u mijn uitwerking aan.

Opgave 1 (1928)

De lijn DE , die de voetpunten der hoogtelijnen uit A en B op de overstaande zijden neergelaten verbindt, verdeelt de driehoek ABC in twee delen van gelijke oppervlakte. Bereken de hoeken van deze driehoek als $AE = \frac{1}{2}BD$ is.

Opgave 2 (1928)

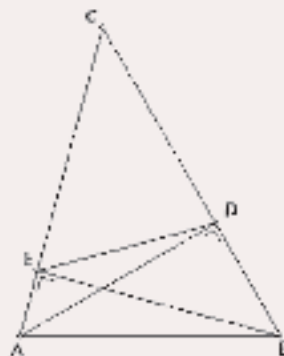
Gegeven een $\angle BAC = \alpha$ en op het been AC ligt een punt P .

Er zijn twee cirkels met hun middelpunt op AC , die elkaar in P en bovendien AB raken.

Als r de straal van de kleinste cirkel, R die van de grootste cirkel is, bewijs dan $r = R \cdot \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$

Uitwerkingen

Opgave 1 – Eerst een tekening; zie *figuur 1*.



figuur 1

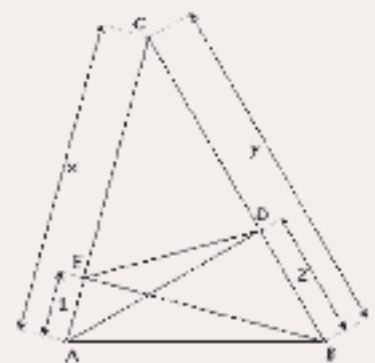
Een veelvoorkomende situatie wanneer in een driehoek twee hoogtelijnen worden getrokken: $ABDE$ is een koordenvierhoek, AB is middellijn van de omgeschreven cirkel, de hoeken AEB en ADB zijn 90° , en de hoekpunten ervan liggen (volgens de stelling van Thales) op deze cirkel.

Dus is $\angle EDB + \alpha = 180^\circ$, dus is $\angle EDC = \alpha$. Analoog geldt: $\angle DEC = \beta$.

Dus zijn de driehoeken ABC en CDE gelijkvormig. (Lijn DE wordt wel antiparallel aan AB genoemd).

Gegeven is dat de oppervlakteverhouding tussen deze driehoeken 2 is, dus is de verhouding tussen overeenkomstige zijden gelijk aan $\sqrt{2}$.

We mogen één van de lengtes gelijk stellen aan 1. Gekozen is hier voor $AE = 1$, dus $BD = 2$. Stel verder $AC = x$ en $BC = y$. Zie *figuur 2*.



figuur 2

Dan volgt uit de gelijkvormigheid:

(1)... $x : y = (y - 2) : (x - 1)$

De factor $\sqrt{2}$ kunnen we inzetten:

$CD \cdot \sqrt{2} = AC$. Dus:

(2)... $x = (y - 2)\sqrt{2}$

Uit (1) en (2) volgt na enige algebra:

$x = 2 + 2\sqrt{2}$ en $y = 4 + \sqrt{2}$.

Hiermee kunnen we ontbrekende lengtes uitrekenen:

Over de auteurs

Dit artikel is een bewerking van (een deel van) een werkstuk voor vakdidactiek van Ellen Vroegindewei, studente van de lerarenopleiding. Ellen is een zij-instromer met veel onderwijservaring.

E-mailadres: e.vroegindewei@gmail.com

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).

E-mailadres: fransballering@hetnet.nl

$$CE = AC - AE = x - 1 = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$CD = y - 2 = 2 + \sqrt{2}$$

Met basis-goniometrie volgt nu snel:

$$\cos \gamma = \frac{CE}{BC} = \frac{1+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ zodat:}$$

$$\gamma = 45^\circ$$

Ook is $BE = CE = 1 + 2\sqrt{2}$, en

$$\tan \alpha = \frac{BE}{AE} = \frac{1+2\sqrt{2}}{1}, \text{ zodat:}$$

$$\alpha = 75,3611934^\circ \approx 75^\circ 21' 40''$$

waarna:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \approx 59,6388066^\circ \approx$$

$$59^\circ 38' 20''$$

Wanneer u deze opgave voor uw leerlingen te pittig vindt, kunt u overwegen deze als studieobject te presenteren, waarin voor leerlingen mooie deelactiviteiten zitten:

- verband tussen lineaire en oppervlakte-vergrotingsfactor;
- een algebraïsche activiteit: het oplossen van x en y hierboven;
- het laten aantonen dat $\gamma = 45^\circ$ exact, door de uitdrukking $\frac{1+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ te laten herleiden tot $\frac{1}{2}$.

Opgave 2 – Ook hierbij eerst een tekening; zie **figuur 3**.



figuur 3

De uitdrukking $r = R \cdot \tan^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$ die moet worden bewezen geeft eigenlijk de constructie al weg. Ga namelijk op zoek naar deze hoek!

In **figuur 3** is in P de loodlijn op AC getekend, die AB snijdt in D . Wanneer je nu de deellijn van hoek ADP tekent, die AC snijdt in M , geldt:

$$\angle ADM = \angle PDM = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$$

Omdat M op de deellijn van hoek ADP ligt, geldt: $MP = d(M, AB)$.

Dus is M middelpunt van een van de gezochte cirkels.

Analoog snijdt de deellijn van hoek BDP de lijn AC in N ; dus: $NP = d(N, AB)$.

N is daarmee het middelpunt van de andere gezochte cirkel.

En dan kan het lijnstuk PD met de hoek van $(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha)$ in verband worden gebracht:

- in driehoek PDM : $\tan(\angle PDM) = \frac{MP}{PD}$,
dus $\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \frac{r}{PD}$, en:
- in driehoek PDN : $\tan(\angle PDN) = \frac{NP}{PD}$,
dus $\tan(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \frac{PD}{R}$.

Eliminatie van PD levert de gevraagde uitdrukking.

Ik zal deze opgave gaan gebruiken in mijn les, maar de formulering aanpassen:

Gegeven een $\angle BAC = \alpha$. Op het been AC ligt een punt P .

Er zijn twee cirkels met hun middelpunt op AC , die elkaar in P en bovendien AB raken.

Teken deze cirkels. Licht je werkwijze toe.

Naschrift van de Redactie

Bij Opgave 2 – Het middelpunt X ($= M, N$) van een gezochte cirkel heeft de eigenschap: $d(X, P) = XP = d(X, AB)$.



figuur 4

Dus is X (per definitie) een punt van de parabool waarvan P het brandpunt is en AB de richtlijn; zie **figuur 4**. Een door P gaande koorde van die parabool (de lijn AC) heeft de eigenschap dat de raaklijnen in de snijpunten ervan met de parabool elkaar loodrecht snijden op de richtlijn (dus in D). Immers, met M', N' als loodrechte projecties van M, N op AB is, volgens de raaklijneigenschap van de parabool:

$$- \angle DMM' = \angle DMP = x;$$

$$- \angle DNN' = \angle DNP = y.$$

En omdat MM' evenwijdig is met NN' , is $2x + 2y = 180^\circ$, zodat $x + y = 90^\circ$ (in driehoek DNM).

De vierhoeken $DPMM'$ en $DPNN'$ zijn vliegers. Dan is:

$$- \angle M'DM = y = \angle PDM \text{ (raaklijn } t_M);$$

$$- \angle N'DN = x = \angle PDN \text{ (raaklijn } t_N).$$

De hoeken bij P in die vierhoeken zijn dus gelijk aan 90° .

De punten M en N zijn nu via de bissectrices van de hoeken PDA en PDB te construeren.

Merk overigens op dat D het midden is van het lijnstuk $M'N'$. De lijn die in D loodrecht staat op AB , snijdt dan AC in het

midden van het lijnstuk MN . De cirkel met middelpunt D' en straal $D'D$ (Thales-cirkel) snijdt AC ook in de punten M en N .

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan 't Hooghe Landt te Amersfoort.
E-mailadres: alecluse@casema.nl

Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

Het zwakke geslacht?

Deze zomer vond in Amsterdam de Internationale Wiskunde Olympiade plaats. Het allerbeste resultaat werd gehaald door de Duitse Lisa Sauermann; het beste Nederlandse resultaat door Madelon de Kemp. Allebei meisjes dus, en dat is nog best wel bijzonder, maar echt heel verbazingwekkend nu ook weer niet. Wie denkt er nu nog dat meisjes minder goed in wiskunde zouden moeten zijn dan jongens? U en ik dus niet, maar zo'n vijftig jaar geleden was het idee dat meisjes toch minder aanleg hadden voor wiskunde, nog heel gewoon en honderd jaar geleden dacht vrijwel iedereen er zo over, vrouwen vermoedelijk net zo goed als mannen. Dan ligt het natuurlijk voor de hand om meisjes, als ze al wiskunde kregen, een lichter programma voor te zetten dan jongens. Zo'n programma werd gegeven op de Middelbare Meisjes School. Die MMS had voor talen een heel stevig programma, maar het wiskundeprogramma was speciaal aan die veronderstelde mindere geschiktheid aangepast.

Met de Mammoetwet verdween die MMS, maar dat betekende nog niet dat meisjes even vaak wiskunde gingen kiezen als jongens. In 1981 werd de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde opgericht, die daar wat aan wilde doen. De Werkgroep heeft ruim 10 jaar bestaan en speelde in die tijd een belangrijke rol binnen de NVvW. In deze aflevering frissen we ons geheugen over de wiskunde op de MMS en de Werkgroep Vrouwen en Wiskunde eens wat op.

Een speciale school voor meisjes

In de Wet op het Middelbaar Onderwijs van 1863 werd de mogelijkheid geopend om speciale middelbare scholen voor

meisjes op te richten, maar dat was dan ook ongeveer alles wat die wet daarover regelde. Pas in 1935 kwam er iets als een voorgeschreven lessentabel. Daarin werd bepaald dat er totaal 12 uren aan 'reken- en stekunde' moesten worden besteed om een erkend diploma op te leveren. Dat was vermoedelijk al niet zo veel als in de beginjaren werd gegeven, maar in de jaren daarna werd het nog minder. Vanaf 1949 werd nog maar 8 uur voorgeschreven, maar wel werd de uitdrukking 'reken- en stekunde' vervangen door 'wiskunde', wat de mogelijke opende om ook wat aan meetkunde te doen.

Het ging dan wel niet om veel uren, maar wel om heel wat leerlingen. In 1945 waren er 43 MMS'en, als aparte school of als onderdeel van een grotere scholen-gemeenschap, met 3489 leerlingen, maar in 1962, zeventien jaar later, ging het om 177 scholen met 25.197 leerlingen! De MMS was dus zeker een schoolsoort van belang. Wiskunde was op de MMS geen eind-examenvak en er was geen voorgeschreven programma, dus er was nogal wat vrijheid bij de inrichting van het onderwijs. Gezien het vooral cultureel-vormende karakter van de MMS zou een soort wiskunde-C voor de hand gelegen hebben, maar aan zoiets dacht toen nog niemand. Er werden wel speciale boekjes voor de MMS geschreven, maar dat waren toch eigenlijk gewoon wat vereenvoudigde versies van de methodes die ook op de HBS en het gymnasium gangbaar waren. Je kunt je nauwelijks voorstellen dat een algebraboekje voor de MMS, nog uit 1959, met de titel *HET IS ZO EENVOUDIG* erg stimulerend gewerkt heeft!

Een meer moderne aanpak bood de serie *Wiskunde voor de MMS*, in drie deeltjes, van D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof

uit begin jaren zestig. Dat zijn bekende namen uit de wiskundendidactiek; Dieke van Hiele-Geldof promoveerde gelijktijdig met haar man Pierre van Hiele op baanbrekend didactisch onderzoek, en Gerrit Krooshof was redacteur van *Euclides* en *Pythagoras*, en later een van de auteurs van de eerste versie van *Moderne Wiskunde*. Hun MMS-boekjes hebben wel wat weg van de methode *Van A tot Z*, voornamelijk het werk van Pierre van Hiele. De didactische aanpak in deze boekjes, zoals het gebruik maken van intuïtieve inleidingen, roosters in de meetkunde en getallenrijen in de algebra, is inderdaad moderner, maar nergens is aan te merken dat de boekjes voor een toch wel specifieke doelgroep bestemd zijn. Zo wordt het stapelen van ruimtefiguren ingeleid met het bespreken van verschillende types metselwerk, nauwelijks een voorbeeld uit de leefwereld van meisjes van twaalf jaar, waarvoor dit deeltje bedoeld is. Maar misschien sprak het voorbeeld van de zeester de leerlingen wel meer aan; *zie figuur 1* op pag. 164.

Vrouwen en Wiskunde

Op zaterdag 7 november 1981 kwamen zo'n 45 vrouwen in Bilthoven bij elkaar om over de problemen rond vrouwen en wiskunde te praten. Kern van die problemen was natuurlijk dat veel minder meisjes wiskunde in hun pakket kozen dan jongens. Het was nog de tijd van de vakkenpakketten, dus je kon wiskunde makkelijk laten vallen. Dat had gevolgen voor de vervolgstudies; in Nederland kozen maar weinig meisjes voor een studie in een exact of technisch vak. Bovendien kwam de HEWET er aan, en de vrees was dat veel meisjes die toen nog wiskunde I kozen, voor wiskunde A zouden gaan kiezen.

De bijeenkomst was zo'n succes dat het de



fig. 19

2. De zeester

- Bekijk plaat 19. Hoeveel symmetrieassen heeft de afgebeelde zeester?
- Je kunt een figuur maken, die op een zeester lijkt. Begin met een regelmatige vijfhoek en zet op iedere zijde daarvan een gelijkbenige driehoek, zodat de vijf gelijkbenige driehoeken congruent zijn. Maak deze figuur op tekenpapier of dun karton. De figuur moet ongeveer zo groot zijn als de zeester op de foto.
- Snijd deze figuur voorzichtig uit, zodat ook het papier, waaruit hij gesneden wordt heel blijft en er dus een opening overblijft, waarin de figuur precies past. Op hoeveel manieren past de figuur in de opening?

43

figuur 1 Dit voorbeeld van een zeester dook later nog eens op in een IOWO-pakketje. Het gebruik van symmetrieassen en impliciet van transformaties past in de vernieuwingen in de meetkunde van de jaren zestig.

organisatoren enigszins overrompelde, maar ze grepen hun kans en stampten onder leiding van Marja Meeder, Francis Meester en Nellie Verhoef (die sinds 1978 bestuurslid was van de NVvW) binnen korte tijd een 'Werkgroep Vrouwen en Wiskunde' uit de grond; *zie figuur 2*.

Er ontstond er een goede samenwerking tussen de Werkgroep en het bestuur van de vereniging, en de Werkgroep werd een onderdeel van de NVvW. De ministeries van Onderwijs en van Sociale Zaken en ook de vereniging subsidieerden de nieuwe Werkgroep, die al spoedig heel wat activiteiten ontplooidde. Er werd twee keer per jaar een studiedag, soms zelfs studieweekend georganiseerd, er kwam een informatiecentrum en een secretariaat en er verscheen een paar keer per jaar een nieuwsbrief met nieuws over activiteiten uit de Werkgroep en overdrukken van andere publicaties rond vrouwen en wiskunde. Binnen de Werkgroep werden allerlei kleinere groepjes gevormd die zich bezig hielden met zaken als de komende HEWET, schoolboeken, onderzoek, volwassenenonderwijs, keuzeproblematiek en computerkunde. Een hoogtepunt was misschien wel de studiedag van de NVvW in 1984, die door de Werkgroep was georganiseerd, en dus ook geheel in het teken van Vrouwen en Wiskunde stond; *zie figuur 3*. Een andere mijlpaal was ongetwijfeld het verschijnen van het boekje *Vrou Wiskundig*, waarvan vele honderden exemplaren verkocht werden.

Makkelijk was de taak die de Werkgroep zichzelf opgelegd had, natuurlijk niet. Het ging immers om het veranderen van cultureel bepaalde patronen – dat die patronen cultureel bepaald waren was uiteraard het uitgangspunt – die generaties lang waren ingesleten. Zoiets doorbreek je niet zo maar. De groep werd bovendien geconfronteerd met het soort dilemma waar emancipatiebewegingen wel vaker tegen aanlopen: moet je nu conformeren aan de traditionele 'mannelijke, koude en abstracte' wiskunde, of moet je nu juist ook proberen te streven naar heel andere, vrouwvriendelijke wiskunde?

Hoe succesvol de Werkgroep was, is natuurlijk onmogelijk achteraf na te gaan; *zie figuur 4* op pag. 167. Twee dingen kunnen in ieder geval achteraf wel gezegd worden. Door de Werkgroep is een ongelooflijke hoeveelheid werk verzet, en het probleem

Vrouwen en Wiskunde werd dan misschien wel niet opgelost, maar wel definitief op de kaart gezet – eindelijk!

In 1992 ging de Werkgroep op in de Stichting Vrouwen en Exacte Vakken. Aanleiding was het verdwijnen van de eigen subsidie waarvan het secretariaat en het documentatiecentrum betaald werden. Het oorspronkelijke elan was misschien toen ook wel aan het verdwijnen. In de nieuwsbrief van december 1992 waarin de oprichting van 'Vrouwen en Exacte Vakken' wordt aangekondigd, wordt ook geklaagd over de geringe opkomst op de laatste landelijke dag.

De Stichting Vrouwen en Exacte Vakken was geen lang leven beschoren. Vermoedelijk is de Stichting en het bijbehorende centrum rond 1995 ter ziele gegaan, ook door het verdwijnen van de subsidie. Wel bestaat er nog steeds, *alive and kicking*, een verwante organisatie, de stichting VHTO, in 1983 opgericht door een aantal vrouwelijke docenten aan wat toen nog de HTS heette. Het is nu een *Landelijk expertisebureau meisjes/vrouwen en bèta/techniek*.^[1]

Hoe staat het er nu eigenlijk mee?

De MMS was gebaseerd op het idee dat meisjes van nature nu eenmaal heel anders waren dan jongens, en dat daarom een ander programma meer geschikt voor hen was. In de praktijk kwam het er echter op neer dat ze bij wiskunde een slap aftreksel van het gewone programma kregen. Apart onderwijs voor jongens en meisjes kwam ook op heel andere gronden voor. Tot in de jaren vijftig van de vorige eeuw was binnen katholieke kring apart onderwijs voor jongens en meisjes heel gewoon, in hoofdzaak omdat gemengd onderwijs maar tot onzedelijke toestanden zou leiden. Er waren katholieke meisjes-lycea en -HBS'en, waarop in principe hetzelfde programma werd onderwezen als op de scholen voor jongens, al was zo'n aparte HBS voor meisjes vaak wel zesjarig. Er wordt wel beweerd dat het op die katholieke meisjes-scholen makkelijker was om een exacte richting te kiezen dan op gemengde scholen, een geluid dat ook op de allereerste bijeenkomst van 'Vrouwen en Wiskunde' gehoord werd.

Heel recent is nog eens voor apart onderwijs voor jongens en meisjes gepleit, maar nu juist omdat jongens zo 'anders'

Dag Kollega,

Ben je een vrouw ?

Misschien denk je " wat doet dat er nu toe ? ", maar dat doet er nu juist wel toe.

Er zijn niet zoveel vrouwen die zich met wiskunde bezig houden en dat is niet toevallig. Opvoeding, school, je omgeving werken je wat dat betreft vaak tegen. Daarom is het best bijzonder als je je, tegen die stroom in, wel met wiskunde bezig houdt

Wat zou natuurlijk niet zo bijzonder moeten zijn.

Vrouwen hebben niet minder talenten dan mannen, zeker niet wat betreft de exakte vakken.

Er is gelukkig een terrein waar we, als vakgenoten, invloed op uit kunnen oefenen: het wiskundeonderwijs.

De groep Vrouwen en Wiskunde, die met de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren verbonden is, ontwikkelt ideeën om het wiskundeonderwijs voor meisjes en vrouwen aantrekkelijker te maken. Ook willen we stimuleren dat meisjes en vrouwen, meer dan nu, exakte vakken in hun pakket kiezen.

In werkgroepen diepen we verschillende onderwerpen uit zoals: de HEWET, lesmateriaal en computerkunde. Ook organiseren we landelijke dagen om verschillende ideeën bijeen te brengen. Via EUCLIDES en DE NIEUWE WISKRANT geven we regelmatig informatie over onze activiteiten.

figuur 2 Een oproep uit de begintijd van 'Vrouwen en Wiskunde' om zich aan te melden bij de Werkgroep. Dat werd inderdaad in groten getale gedaan.

Leerboeken en Lesmateriaal.

Dat weinig meisjes wiskunde in hun vakkenpakket kiezen heeft allerlei oorzaken. In de werkgroep willen we bekijken welke rol het lesmateriaal hierin speelt.

Het gaat ons niet om het tellen van aantallen meisjes en jongens in de voorbeelden, maar om de vraag in welke mate jongens en meisjes zich aangesproken voelen door een bepaalde presentatie van de leerstof. Uit een aantal wiskundemethoden hebben we de hoofdstukken gebundeld waarin de goniometrie geïntroduceerd wordt. Deze bundel wordt tijdens de werkgroep aan de deelnemers uitgereikt om aan de hand daarvan met elkaar van gedachten te wisselen over manieren om het onderwerp in te voeren, goede voorbeelden, konteksten, het trainen van vaardigheden en andere zaken die van belang zijn om wiskundeonderwijs voor meisjes en jongens aantrekkelijk te maken. Thea de Poel, Sylvia van der Werf.

figuur 3 Een van de workshops op de geheel door 'Vrouwen en Wiskunde' verzorgde studiedag van de NVvW in 1984. Het dilemma bij dit onderwerp is natuurlijk of je juist voorbeelden en toepassingen uit de leefwereld van meisjes moet kiezen, of dat je dan juist rolbevestigend en dus verkeerd bezig bent.



'De master sluit goed aan bij mijn werk. De didactische kennis pas ik direct toe. Zo komt mijn boodschap beter over.'

Word 1^e graads docent Wiskunde bij de HAN!

Ontwikkel u op masterniveau tot zelfstandig docent in de bovenbouw havo/vwo en verdiep uw vakspecifieke kennis. Leer vernieuwingen binnen het wiskunde-onderwijs concreet te ontwerpen en in te voeren. Als 2^e graads docent Wiskunde kunt u in september bij de HAN van start met de opleiding Master Leraar Wiskunde.

Kies voor de HAN, dan kiest u voor de beste aanbieder van masteropleidingen volgens de Keuzegids Masters 2011!

**KOM NAAR DE OPEN DAG OP
3 MAART IN NIJMEGEN**

**MAAK GEBRUIK
VAN DE
LERARENBEURS!**
Vraag hem aan
1 april - 13 mei

Master Leraar Wiskunde

- Uitbreiding vakkennis op basis van de landelijke kennisbasis
- Vakdidactische vernieuwingen in het V.O. per 2015
- Praktijkgericht onderzoek
- Masterproject: vernieuwing van leerarrangementen bovenbouw havo/vwo

T (024) 353 06 00 | E masters@han.nl

► **HAN**

www.han.nl/masters

MASTERPROGRAMMA'S

HAN Masteropleidingen zijn door de NVAO geaccrediteerd

AUTEURS GEZOCHT

Pendion is op zoek naar enthousiaste, ervaren of beginnende docenten wiskunde die mee willen werken aan het ontwikkelen van bruikbaar en inspirerend lesmateriaal.

Wij ontvangen graag reacties van docenten die per week een aantal uren vrij hebben en die bekend zijn met de exameneisen voor HAVO- en vwo-leerlingen.

Pendion biedt een passend honorarium. De werkzaamheden kunnen vanuit huis of school worden uitgevoerd.

Geïnteresseerd?

Neem voor een kennismaking contact met ons op via e-mail (info@pendion.nl).

 **pendion**
vernieuwend onderwijs

zouden zijn en daarom een aparte behandeling nodig zouden hebben. Daarbij kwam het argument dat zoiets beter zou zijn voor de combinatie meisjes en exacte vakken, ook nog wel eens op tafel, soms onder verwijzing naar het project *Coornhert Exact*, waarbij op het Coornhert Lyceum in Haarlem in de jaren negentig wis- en natuurkunde aan jongens en meisjes in de derde klas apart werd onderwezen. Het zal er wel niet van komen, en dat lijkt me ook maar het beste. Maar toch is de huidige stilte rond meisjes en wiskunde, en, zo u wilt wat ruimer, meisjes en exacte vakken opvallend. Zijn dan alle problemen op dit gebied de wereld uit? Niet helemaal, zoveel lijkt me wel duidelijk. Er is wel het een en ander verbeterd, en er zijn, zeker op het vwo, hoopgevende tendensen. Op de havo lijken de perspectieven weer wat somberder. Maar zolang op de TU's bij de 'harde' technische vakken nog steeds bijna alleen jongens rondlopen, is er nog wel wat zedingswerk te verrichten!

Discussie over de toekomst van Vrouwen en Wiskunde

Staatsonderwerpen, die genoemd werden

- * Netwerkfunctie van de werkgroep
 - mandeling van de krachten
 - kritische groep
- * Een enthousiaste groep mensen, ook nieuwe leden raken snel enthousiast
- * Landelijke dagen:
 - contacten met anderen op de landelijke dagen
 - sociaal opladen op zulke dagen
 - veel informatie
 - informele sfeer
- * Invloed naar wiskundeonderwijswereld/ministerie van O&W
 - bekendheid en invloed bij commissies in de wiskundeonderwijswereld
 - men vindt dat men rekening moet houden met ons
 - thuis in de politiek
- * Activiteiten en publicaties van de werkgroep

Zwakke kanten, die genoemd werden

- * Netwerk
 - alleen vrouwen, het is hard nodig om met mannen dit soort dingen te bespreken
 - groep lijkt vaak los zand, meer moeite doen om mensen vast te houden
 - er hangt een wans van feminisme aan ons heen, dat heeft geen gunstige betekenis bij veel collega's. Lange van vernemen moeten worden.
 - goede ideeën, maar geen duidelijke lijn
- * Ideeen
 - soms een zwakke uitwerking van onze ideeën, waardoor ze versminkt worden.
 - herdenken we nu echt dat vrouwen meisjes met meer plezier wiskunde doen?
 - te weinig aandacht voor andere, lagere vormen van onderwijs, voor volwassenen/huiseducatie. Incidenteel komt er iets ter sprake, maar het verdwijnt weer snel, leidt niet tot activiteiten.
- * Invloed naar het onderwijsveld toe
 - bekendheid bij wiskundeleraars in het voortgezet onderwijs (zowel mannen als vrouwen)
 - te weinig contacten met het veld
- * Activiteiten
 - alles concentreert zich in de grondslag; ideeën regionale strekkingen instellen
- * Te kleine actieve kern
 - we betrekken te weinig nieuwe leden bij de activiteiten, hoe kan dat beter?

figuur 4 Op de landelijke dag in oktober 1992 werd getracht de balans na ruim 10 jaar activiteit op te maken. Achteraf kan misschien gezegd worden dat de houdbaarheidsdatum van de Werkgroep-aanpak toen wel ongeveer verstreken was.

Noot

[1] Zie ook www.vhto.nl

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Rekenen en Wiskundeonderwijs.
E-mailadres: h.j.smid@ipact.nl

Boekbespreking

CONQUEST OF THE PLANE



[Jeroen Spandaw]

Ondertitel: Using The Economics Pack Applications of Mathematica for a didactic primer on Analytic Geometry and Calculus

Auteur: Thomas Colignatus

Uitgever: T. Cool (Consultancy & Econometrics), Scheveningen (2011)

ISBN 978 90 8047746 9

Prijs: € 24,95 (238 pagina's)

Een blik op de website « www.dataweb.nl/-cool/ » van Thomas Colignatus (werkelijke naam Thomas Cool) laat zien dat de auteur een kleurrijk persoon is. Deze econometrist en kandidaat voor het Europees presidentschap denkt bijvoorbeeld te hebben aangetoond dat de beroemde stelling van Kurt Gödel over de existentie van onbeslisbare (dus noch te bewijzen, noch te weerleggen) proposities simpelweg onzin is! In allerlei publicaties geeft hij zijn ongezouten mening over politiek, economie, wiskunde, wiskundigen, logica en wiskunde-onderwijs. Van wiskundigen laat hij in zijn stuk *Waarschuwing voor wiskundigen* weinig heel. Zij zijn 'opgeleid tot abstracte theorie', terwijl 'voor onderwijs een empirische instelling nodig is, welke wiskundigen ontberen'. Het gevolg volgens Colignatus: slecht wiskundeonderwijs, woekerpolissen en economische crisis.

Ik ben het met Colignatus eens dat wiskunde een prachtig en belangrijk vak is en dat het ons op school onvoldoende lukt om dat duidelijk te maken. Ik denk net als hij dat het voor econometristen en andere toepassers van wiskunde erg belangrijk is om te leren over de beperkte toepasbaarheid van wiskundige modellen. Verder is voor mij, net als voor Colignatus, *Bildung* een belangrijk onderwijsideaal: leren zo veel mogelijk zelf te oordelen en zo onafhankelijk mogelijk te worden van autoriteiten die vertellen wat goed is en wat niet. Natuurlijk lukt dat vaak slechts in beperkte

mate vanwege ontbrekende specialistische kennis. Maar gelukkig kun je juist in de wiskunde een heel eind komen zonder veel specialistische kennis. Een Delftse collega antwoordt op de vraag van studenten of een bepaalde algebraïsche manipulatie 'mag' met: 'het mag als het correct is.' Niet de autoriteit, niet de professor, niet de leraar, niet het antwoordenboekje, maar de logica beslist. Dit is natuurlijk een idealisatie van een complexere werkelijkheid. Ik kan bijvoorbeeld niet overzien of Wiles' bewijs van de Stelling van Fermat helemaal correct is, dus ik vertrouw grotendeels op het oordeel van autoriteiten.

Over Colignatus' wiskunde en didactiek daarentegen durf ik zelf wel een oordeel te vellen. Dat oordeel is negatief. Colignatus snijdt interessante punten aan, maar zijn wiskundige en didactische analyses zijn zwak. In de volgende paragrafen beschrijf ik een paar belangrijke thema's uit het boek *Conquest of the Plane* en mijn bezwaren. U kunt dan zelf oordelen. Ik heb dagen van mijn leven verspild aan het lezen van dat boek en het schrijven van deze recensie. Ik heb veertien bladzijden aantekeningen verzameld over het onbegrijpelijke proza, de onzin, de regelrechte fouten, de misverstanden, de half begrepen en slecht gepresenteerde wiskunde. Ik zal u niet vermoeien met een uitputtende opsomming van alle onzin, maar ik hoop wel dat na deze recensie *niemand* ooit meer tijd hoeft te besteden aan de pseudo-wiskundige werken van Colignatus. Daarom beperk ik deze recensie nu niet tot een kort en krachtig 'Dit boek is onzin! Verdoe hier uw tijd niet aan!', maar zal ik een aantal voorbeelden geven uit de verwarde wereld van Colignatus. Ik heb de ijdele hoop dat dit de 'Colignatusen' van Nederland er in de toekomst van zal weerhouden nog vaker tijdschriften en recensenten lastig te vallen met hun flauwekul.

Het boek *Conquest of the Plane* gaat over vlakke meetkunde en calculus. De brug tussen de twee thema's wordt gevormd door de goniometrische functies. Colignatus zegt nooit in welk vlak hij werkt, maar ik vermoed dat het $\mathbf{R}^2$ is. Hier is een aantal vernieuwingen van Colignatus:

- een nieuwe notatie voor 2π , namelijk Θ ;
- een nieuwe eenheid voor hoeken, genaamd UMA;
- nieuwe goniometrische functies, genaamd Xuc, Yuc, Xur en Yur;
- een nieuwe definitie van vectoren in $\mathbf{R}^2$;
- gebruik van *Mathematica*, in het bijzonder een door Colignatus geschreven pakket.

De UMA (unit measure around) is gedefinieerd door $1 \text{ UMA} = 2\pi$ radialen $= 360^\circ$. De functies Xur en Yur zijn de bijbehorende herschaalde versies van de cosinus en sinus. Bij eerste lezing is mij ontgaan hoe de functies Xuc en Yuc zijn gedefinieerd en helaas is er geen index om het snel op te zoeken (ik ga nu niet nóg meer tijd verspillen). Colignatus beweert dat door dergelijke vernieuwingen studenten eindelijk de cosinus en sinus gaan begrijpen. Ik geloof er helemaal niets van. Bij cosinus en sinus zal de stap van verhoudingen in een driehoek naar functies op $\mathbf{R}$ altijd een didactische uitdaging blijven; de factor 2π kom je vroeg of laat tegen met welke eenheid je ook werkt, en je bewijst leerlingen geen dienst met nieuwe notaties die verder helemaal niemand gebruikt.

Θ , UMA, Xuc, Yuc, Xur en Yur zijn wellicht nog een kwestie van smaak, maar bij de vectoren gaat Colignatus echt de mist in. Hij definieert een vector als een geordend paar (P, Q) met P en Q in $\mathbf{R}^2$. Colignatus zou Colignatus niet zijn als hij hiervoor geen eigen notatie voor had: $\{P, Q\}$. Hij lijkt zich echter niet te realiseren dat een vector volgens deze definitie een element van $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 = \mathbf{R}^4$ is, want de som

van twee Colignatus-vectoren uit $\mathbf{R}^4$ blijkt twee bladzijden later (soms?) in $\mathbf{R}^2$ te liggen! Ik kan de juistheid hiervan niet beoordelen, want Colignatus definieert die optelling nergens.

Ben ik nou zo'n wiskundige betweter, zoals beschreven in Colignatus' polemieek *Waarschuwing voor wiskundigen*? Ben ik, misvormd door 'abstracte theorie', niet in staat Colignatus' werk naar waarde (wiskundig of didactisch) te schatten? Of voldoet Colignatus niet aan zijn eigen motto 'sloppiness is never good'? Kent u iemand die door zijn bijdragen het wiskundige licht gaat zien? Ik niet. De Mathematica-voorbeelden in het boek, zoals tabellen waarin hoeken ($k \cdot 2\pi$) in stapjes met $\Delta k = 0,1$ worden omgerekend in andere eenheden (zoals de UMA), betreffen trivialiteiten verpakt in afschrikwekkende syntax. Opgaven komen in het boek trouwens niet voor, want, zo lezen we, die kunnen we overal op het internet vinden en na lezing van dit boek met zijn software oplossen.

In het meetkundedeel gebruikt Colignatus de identificatie $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ en die is inderdaad reuze handig bij problemen in $\mathbf{R}^2$ die gaan over rotatie, translatie en strekking. Een mooi voorbeeld (niet in Colignatus' boek) is het eenvoudig te googlen schatgravers-probleem. Met complexe getallen los je dit in één regel op. Hierbij is het natuurlijk niet noodzakelijk om over die beruchte $\sqrt{-1}$ te spreken: je kunt direct de vermenigvuldiging op $\mathbf{R}^2$ definiëren door $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$. Je moet dan wel zaken als associativiteit, $z(wv) = (zw)v$, en distributiviteit, $z(w + v) = zw + zv$, checken en dat doet Colignatus niet. Bovendien doen Colignatus' onhandige notaties ernstig afbreuk aan de schoonheid van deze wiskunde. Het gebruik van Mathematica maakt het nog erger: om dit eenvoudige idee te begrijpen zijn blijkbaar commando's

als 'VectorProductGO', 'VectorProductPlot' en 'PointToTFMatrix' nodig.

Het is waarlijk een mirakel dat ik als vwo-5-leerling complexe getallen heb kunnen begrijpen zonder deze didactische 'verbeteringen'!

Een laatste opmerking over Colignatus' meetkunde: de 'uitleg' van matrixrekening wordt beperkt tot het poneren van formules zonder enige rechtvaardiging. Nergens wordt bijvoorbeeld nagerekend dat het matrixproduct (niet het *inproduct*, zoals Colignatus schrijft) van een matrix met zijn inverse (als die bestaat) de eenheidsmatrix is. We moeten blijkbaar alles op gezag van de auteur aannemen. Dat is in strijd met ons beider 'Bildungsideaal'. Over het oplossen van $Ax = b$ als $\det(A) = 0$ wordt niets gezegd.

De belangrijkste belofte in het deel over calculus is analyse zonder limieten en zonder infinitesimalen. Deze belofte wordt niet waargemaakt. Laten we eerst even kijken naar de onder wiskundigen gebruikelijke manier om de afgeleide van een functie f in een punt a te definiëren:

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Hierbij zeggen we dat een functie g convergeert naar een getal L voor $h \rightarrow 0$, notatie $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = L$, als er voor iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta > 0$ bestaat zodat $|g(h) - L| < \varepsilon$ voor alle h die voldoen aan $0 < |h| < \delta$. Je gaat eenvoudig na dat er hoogstens één getal L voldoet. In de afgeleide passen we deze definitie van Weierstrass toe op het differentiequotient $g(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Dit differentiequotient laten we ongedefinieerd in $h = 0$. Omdat Weierstrass' geraffineerde definitie nergens $g(0)$ gebruikt, is dat geen enkel probleem. Colignatus' opmerking 'Weierstrass's limit is undefined precisely at the relevant point of interest' (pag. 223), suggereert dat hij dat niet heeft begrepen. Die uitspraak is sowieso onzin,

want $\lim_{h \rightarrow 0} g(h)$ hangt niet van h af, dus wat zou 'undefined at the point of interest' in 's hemelsnaam moeten betekenen voor deze limiet?

In de eeuwen tussen Newton en Weierstrass werd met zogenoemde infinitesimale getallen gewerkt: je nam een 'oneindig klein' getal h , dat niettemin ongelijk was aan 0, en je keek naar het bijbehorende differentiequotient $(\Delta f) / h$. Natuurkundigen doen het nog steeds graag zo.

Om bijvoorbeeld de afgeleide van $f(x) = x^3$ uit te rekenen nemen we een 'infinitesimaal kleine' h en berekenen:

$$f(x+h) = (x+h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3$$

Er geldt dus:

$$\Delta f = (x+h)^3 - x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3 \text{ en } (\Delta f) / h = 3x^2 + 3hx + h^2$$

Omdat h 'oneindig klein' is, zijn de laatste twee termen te verwaarlozen ten opzichte van $3x^2$. Daarom is de afgeleide $3x^2$. Een beetje dubieuze afleiding (de laatste stap werkt bijvoorbeeld niet voor $x = 0$), maar ik kan er toch wel warm voor lopen. Mijn wiskundig geweten heeft er ook weinig problemen mee, want ik weet dat het eenvoudig hard te maken is met een limiet, ik weet dat er sinds de vorige eeuw zelfs een legitieme theorie van infinitesimalen bestaat (zie bijvoorbeeld het mooie spotgoedkope boekje *Infinitesimal Calculus* van Henle en Kleinberg), en ik weet bovendien hoe handig het kan zijn om informeel met infinitesimalen te werken zoals natuurkundigen dat doen.

Weierstrass' definitie van limiet en afgeleide gebruikt uitsluitend gewone reële getallen voorkomen, dus geen 'infinitesimale' getallen. Dat is de essentie van Weierstrass' beroemde ε - δ -definitie van limieten: een exacte definitie die alleen gebruik maakt van het bekend veronderstelde begrip 'reëel getal'. In tegenstelling tot wat Colignatus beweert, lost Weierstrass' definitie dus *wel* de problemen van de oudere aanpak met

infinitesimalen op. De theorie is, anders dan Colignatus beweert, *niet* ‘overly complex and essentially inconsistent’.

Colignatus heeft de volgende ‘ontdekking’ gedaan: als je het differentiequotient $g := (\Delta f) / h$ uitrekent voor een polynoom f , dan vind je een polynoom in x en h . Dit hebben we hierboven gezien voor $f(x) = x^3$, waarvoor $g(x, h) = 3x^2 + 3hx + h^2$. Verder geldt dat je de limiet van g voor $h \rightarrow 0$ eenvoudig kunt bepalen door $h = 0$ in te vullen in g . Voor een wiskundige is dat niet vanzelfsprekend: je moet bewijzen dat $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = g(0)$. Colignatus wijdt daar geen woord aan. Zo *lijkt* het alsof je geen limiet nodig hebt. De limiet zit echter verborgen in de stilzwijgende, plausibele en correcte veronderstelling dat polynomen continu zijn.

Dit is het didactische tovermiddel van Colignatus! Voor alle duidelijkheid: ik ben het met Colignatus eens dat je leerlingen niet hoeft lastig te vallen met een formele ε - δ -definitie.

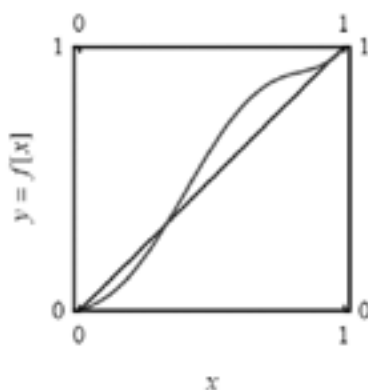
Maar Colignatus schijnt echt te denken dat hij een *wiskundige* ontdekking heeft gedaan, en daar moeten we hem helaas teleurstellen. Natuurlijk kun je een limietloze, puur algebraïsche theorie maken van afgeleiden van eenvoudige functies zoals polynomen. Zulke theorieën zijn dan ook al lang ontwikkeld (zie bijvoorbeeld het lemma ‘Derivation’ op Wikipedia). Je gaat daarbij axiomatisch te werk, waarbij je bijvoorbeeld de productregel als axioma poneert. Maar dat is niet wat Colignatus doet. Laten we eens kijken wat er van zijn ideeën overblijft als we $\sin(x)$ differentiëren in het punt $x = 0$. We moeten dan kijken naar het differentiequotient:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h} := g(h)$$

voor $h \neq 0$. Anders dan in het polynomiale geval, komt er geen polynoom in h uit. Dus we moeten nu echt een limiet uitrekenen; we kunnen niet simpelweg $h = 0$ invullen. Toegegeven, op een zeker didactisch niveau kan dat wel: plot de functie g en je ‘ziet’ dat de ‘correcte’ waarde voor $h = 0$ (de waarde die de functie g continu voorzet in $h = 0$) gelijk moet zijn aan 1. Je ‘ziet’ de limiet in de grafiek, maar aan de limiet zelf ontkom je niet. Hoe doet Colignatus het dan? Wel, hij gebruikt de insluiting $\cos(h) \leq g(h) \leq 1$ om te bewijzen dat $g(h) \rightarrow 1$ als $h \rightarrow 0$. Hij berekent dus gewoon de limiet (op de

gebruikelijke manier). Colignatus’ belofte van limietloze analyse wordt dus niet waargemaakt.

Een laatste voorbeeld over ‘wiskunde’ volgens *Conquest of the Plane*, namelijk Colignatus’ poging om met de fixpuntstelling van Brouwer het getal e te definiëren. Dit hele stuk is Colignatus in optima forma met raadselachtige zinnen als ‘instead of addition we have the addition of derivatives’ en ‘instead of the diagonal we have the “identity function” - a function is always identical to itself’.



figuur 1 Bron: *Conquest of the Plane*, pag. 167

Een opeenstapeling van fouten toont het wanbegrip van de auteur. Ik noem er een paar. Colignatus formuleert Brouwers stelling niet, maar zijn plaatje (zie **figuur 1**) suggereert de stelling dat iedere continue functie van $[0, 1]$ naar $[0, 1]$ een fixpunt heeft. Dit is overigens een eenvoudig gevolg van de tussenwaarde-stelling. Vervolgens wil Colignatus met deze stelling de existentie van $f(x) = e^x$ als oplossing van de differentiaalvergelijking $f' = f$ aantonen. Hij wil daarvoor Brouwer toepassen op een functieruimte, terwijl die stelling helemaal niet over functieruimten gaat. We passen dus een niet van toepassing zijnde, niet geformuleerde stelling toe op een niet genoemde operator op een niet gespecificeerde functieruimte! Ook is volkomen onduidelijk waarom er een oplossing van de vorm $f(x) = a^x$ met $a > 0$ zou moeten zijn, noch waarom deze uniek is.

Opnieuw heb ik het over de krakkemikkige wiskunde van Colignatus. Laten we naar de didactiek kijken. Je kunt eenvoudig aannemelijk maken dat de afgeleide van $f(x) = a^x$ evenredig is met de functie zelf waarbij de evenredigheidsconstante de afgeleide van f in $x = 0$ is, en dat er een getal $e \approx 2,7$ bestaat waarvoor die evenredigheids-

constante gelijk is aan 1. Daar hebben we geen fixpunt-stelling van Brouwer voor nodig.

Ik zou nog vele pagina’s kunnen vullen met wiskundige missers, maar ik hoop dat dit afdoende is. We zien keer op keer hetzelfde beeld: Colignatus heeft gevoel voor didactisch interessante punten, maar wiskundig schiet hij te kort. De radiaal is interessant: het is een ‘wiskundige eenheid’. Je kunt argumenteren dat 1 radiaal identiek met het getal 1 is en dat hoekmaten dus eenheidloos zijn (namelijk het quotiënt van een cirkelboog en een straal). Toch is het soms handig om verschil te maken tussen 1 radiaal en het getal 1. Colignatus begrijpt dat wat een stelling is in de ene opbouw van een theorie (vlakke meetkunde bijvoorbeeld), een definitie kan zijn in een andere aanpak (voorbeeld: Pythagoras en de afstand tussen twee punten in $\mathbb{R}^2$). Dit soort ‘blikwisseling’ is belangrijk in de wiskunde. Verder heeft Colignatus opgemerkt dat in een differentiequotient $h \neq 0$ geldt (nauwkeuriger: mag worden aangenomen), terwijl je vervolgens vaak $h = 0$ neemt. Hij begrijpt echter niet dat Weierstrass’ definitie van de limiet deze paradox keurig netjes oplost.

Hij heeft goede ideeën over het gebruik van complexe getallen in het reële vlak. In het begin schreef ik ook al dat ik ook sommige opinies over onderwijsdoelen en wiskundige modellen deel. Maar daarmee zijn de positieve opmerkingen wel uitgeput. Niemand wordt wijzer van dit boek; daarvoor is de wiskunde te slecht. Gebruikt u uw tijd liever om goede boeken te lezen. Voor een schijntje koopt u de *Elementen* van Euclides, voor wat meer geld het slordige maar leesbare boek *The four pillars of geometry* van Stillwell over verschillende benaderingen van de vlakke meetkunde, of pak het meteen grondig aan en lees *Euclid and beyond* van Hartshorne. Voor een correcte en goed leesbare opbouw van de analyse raad ik u het schitterende boek *Calculus* van Spivak aan. En *ter leering ende vermaeck* leest u de hilarische boeken van Underwood Dudley over pseudo-wiskunde. Wie dergelijke boeken leest, heeft geen enkele behoefte aan Colignatus’ geschrijf.

Over de recensent

Jeroen Spandaw is universitair docent en lerarenopleider wiskunde aan de TU Delft. E-mailadres: j.g.spandaw@tudelft.nl

Boekbespreking

PROFESSOR STEWART'S VERZAMELING VAN WISKUNDIGE RAADSELS



[Chris van der Heijden]

Auteur: Ian Stewart
Vertaling uit het Engels: Rob de Ridder
Uitgeverij: Kosmos Uitgevers, Utrecht/
Antwerpen (2011)
ISBN 978 90 215 4965 1
Oorspronkelijke titel: *Professor Stewart's
Cabinet of Mathematical Curiosities*
Oorspronkelijke uitgever: Profile Books
Ltd., Londen (2008)
Prijs: € 14,95 (308 pagina's; paperback)

Er zijn 10 soorten mensen in de wereld.
*Zij die binaire getallen snappen en zij die dat
niet doen.*

Wie in de klas of groep tijd wil vrijmaken om met de leerlingen eens iets anders te doen dan een gewone les wiskunde, moet beslist dit boek aanschaffen. Het is de Nederlandse vertaling van *Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities*. Professor Ian Stewart is niet alleen hoogleraar in de wiskunde maar ook een vermaard popularisator van de wiskunde en schrijver van sciencefiction boeken. In 1997 heeft hij de door de BBC uitgezonden *Christmas Lecture* gehouden. Op initiatief van de beroemde natuurkundige Faraday is in 1825 The Institution Christmas Lectures opgericht. Vanaf dat jaar, met onderbreking van vier jaren tijdens de Tweede Wereldoorlog, worden deze lectures gehouden. Het is een eer om deze te mogen houden. De voordracht moet voor een breed publiek en vooral voor jonge mensen begrijpelijk zijn. Niet alleen is daarom grote vakkennis vereist maar ook didactische kwaliteit. De onderwerpen komen voornamelijk uit de bètawetenschappen

Het boek bevat een bonte verzameling van taalgrappen (zie titel), puzzels, raadsels, en feiten die zo gepresenteerd worden dat zij een verfrissende kijk op wiskunde geven. Goed kunnen lezen en logisch denken zijn wel nodig om de voorgelegde problemen

te begrijpen. Dit wil niet zeggen dat alleen leerlingen die een kei zijn in wiskunde, de gestelde problemen kunnen oplossen. Gelukkig heeft de auteur gezorgd voor een goede mix van gemakkelijke en moeilijke problemen met, voor zover van toepassing, antwoorden achter in het boek. Er is ruim keus; de inhoudsopgave verwijst om precies te zijn naar 179 onderwerpen. Een breed terrein van de wiskunde wordt bestreken, met kleine uitstapjes naar de natuurkunde, geschiedenis van de wiskunde, logica en grondslagen van de wiskunde. Soms met verwijzing naar websites. Het is ondoenlijk om een volledig beeld hiervan te geven.

Wat de wiskunde betreft, kunnen de leerling spelenderwijs kennismaken met voor hen nieuwe kennisgebieden, zoals knopentheorie, getaltheorie, tegelpatronen, chaostheorie, discrete wiskunde, topologie, fractals, complexiteitstheorie, en de stellingen van Gödel. Er worden klassieke problemen aangeroerd, maar ook moderne waarbij de computer een belangrijke rol speelt, zoals John Conway's Game of Life en Langton's mier waarbij 'celgroei' in een 2-dimensionaal rooster optreedt. Maar plakken en knippen en het spelen met lucifers en lege en volle flessen komen ook voor. En vooral logisch nadenken. De schrijver verwijst vaak naar wiskundigen die baanbrekend werk verricht hebben. Zo passeren de namen de revue van Pythagoras, Diofantus, Fibonacci, Fermat, Euler, Gauss, Maria Gaetana Agnesie, Riemann, Möbius, Hilbert, Emmy Noether, Abel, Poincaré, Hardy, Gödel, Penrose en Perelman, die de Fields-medaille weigerde. De auteur laat daarmee zien dat wiskunde vanaf de tijd van Pythagoras steeds verder ontwikkeld wordt. Zelfs dat er ook nog problemen zijn waar de wiskundigen hun tanden op stuk bijten, zoals het vermoeden van Goldbach en de hypothese van Riemann. Met het zeer leesbare overzicht van de stellingen van Gödel over het onderscheid tussen

(on-)bewijsbaarheid en (on-)waarheid en mogelijke onbeslisbaarheid wordt duidelijk dat wiskunde zelf ook onderwerp is van onderzoek.

De ongewone en soms gekke problemen en raadsels in dit boek maken het tot een uitzonderlijk wiskundeboek. Een boek dat veel leerlingen van het voortgezet onderwijs kan uitdagen en inspireren. Ook volwassenen kunnen er veel genoeg aan beleven. Deze positieve waardering neemt niet weg dat op deze vertaling van de originele Engelse versie wel wat aan te merken is. Bij vergelijking van dit boek met de originele Engelse versie zijn vertaalfouten geconstateerd, maar helaas ook ernstige slordigheden die een probleem of een raadsel en de daarbij behorende antwoorden onbegrijpelijk maken.

Conclusie

Het is een boek dat zeker in de schoolbibliotheek thuishoort. Af en toe kan het een rol spelen in de les. Zoals gezegd is het jammer dat er nogal wat fouten zitten in deze Nederlandse versie, met als gevolg dat problemen pas door bestudering van de context tot klaarheid komen. Dit lijkt mij voor leerlingen te veel gevraagd. Ook woordspelingen komen in de vertaling niet altijd tot hun recht. Daarom is aan te raden dat de docent of de school ook de originele Engelse versie aanschafte. De uitgever zou er goed aan doen om bij een eventuele volgende druk een lijst met errata bij te voegen.

Voor de volledigheid vermeld ik enkele door mij geconstateerde vertaalfouten en slordigheden. Een paar interessante problemen die in vergelijking met de Engelse versie niet correct zijn weergegeven, zijn als voorbeeld samen met hun oplossing opgenomen.

Enkele vertaalfouten

Een vierkant vierkanten (pag. 70). Beteugeling van een rechthoek of vierkant met vier-

kante tegels van verschillende afmetingen. Alle lengtematen zijn geheel-tallig. De vertaling 'We weten allemaal dat een rechthoekige vloer belegd kan worden met vierkante tegels van gelijk grootte, mits de randen van de vloer integere (uit gehele getallen bestaande) veelheden zijn van het oppervlak van de tegel.' Hier worden lengtemaat en oppervlaktemaat met elkaar vergeleken.

Stelling: Alle getallen zijn interessant (pag. 108). 'For a contradiction, suppose not.' wordt vertaald door 'Stel het tegengestelde: alle getallen zijn niet interessant'. Dit moet echter zijn: 'niet alle getallen zijn interessant' of 'er is minstens één getal dat niet interessant is'. Nog beter is de letterlijke vertaling: 'voor een tegenspraak veronderstel van niet'. Laat de lezer zelf uitzoeken hoe het zit.

Stelling: Alle getallen zijn saai (pag. 108). Hier wordt dezelfde fout gemaakt als bij het voorgaande probleem.

Wat is een Mersenne-priemgetal? (pag. 151). 'Bewezen kan worden dat het n -de Mersenne-getal *alleen* een priemgetal is als het deelbaar is door de $(n-1)$ -de term van deze reeks' moet zijn 'Bewezen kan worden dat het n -de Mersenne-getal een priemgetal is *dan en slechts dan* als het deelbaar is op de $(n-1)$ -de term van deze reeks'.

De formule van Euler voor veelvlakken (pag. 174). De letter V staat voor hoekpunt, niet voor hoek (vertex = hoekpunt).

Fractals – de geometrie van de natuur (pag. 187 e.v.). 'Zelfgelijkend' moet zijn 'zelfgelijkvormig(heid)'.

Het probleem van Kepler (pag. 230). '... maar de zijanten zijn zeshoekig' moet zijn '... maar de schuine lagen vormen een zeshoekig raster'.

Niet correct weergegeven problemen

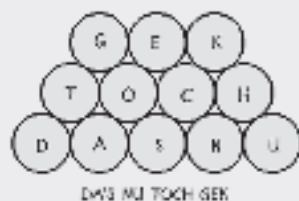
Een antiek, maar erg boeiend probleem is het vinden van een *valse munt uit 12 munten*. Ze wegen allemaal evenveel op één na. Je beschikt over een balans met 2 schalen, zonder gewichten en zonder schaalverdeling. De vraag is: bepaal door 3 keer te wegen welke munt vals is en daarbij bovendien of hij lichter of zwaarder is dan de rest (pag. 41). De codering van de munten berust in de Engelse versie op de dichtregel *FAM NOT LICKED*, bestaande uit 12 letters, voor elke munt één. Deze regel wordt vertaald door *DA'S NU TOCH GEK*. De codering wordt echter niet

Kader 1 – Zoek de valse munt

Onder 12 niet van elkaar te onderscheiden munten bevindt zich één valse munt. Je hebt de beschikking over een weegschaal met twee schalen, zonder gewichten en zonder wijzer en wijzerplaat.

Probeer met 3 keer wegen de valse munt te vinden en bovendien te bepalen of hij lichter of zwaarder is dan de andere munten. Kies daartoe de volgende strategie.

Codeer de munten op de *in figuur 1* aangegeven wijze. Selecteer voor elke weging 2 groepjes van 4 munten, 4 voor de linkerschaal en 4 voor de rechterschaal. Elke munt moet 1, 2 of 3 keer bij een weging betrokken zijn. Maak een beslissingstabel (*zie figuur 2*) waarin voor elke munt en voor elke weging aangegeven wordt welke schaal zakt, rechts (R) of links (L) of dat er evenwicht optreedt (-e-).



figuur 1

		1e keer wegen	2e keer wegen	3e keer wegen
D	zwaar	-e-	R	L
	licht	-e-	L	R
A	zwaar	L	-e-	L
	licht	R	-e-	R
S	zwaar	L	L	-e-
	licht	R	R	-e-
N	zwaar	-e-	R	R
	licht	-e-	L	L
U	zwaar	L	L	R
	licht	R	R	L
T	zwaar	-e-	L	-e-
	licht	-e-	R	-e-
O	zwaar	R	-e-	-e-
	licht	L	-e-	-e-
C	zwaar	R	R	R
	licht	L	L	L
H	zwaar	-e-	-e-	R
	licht	-e-	-e-	L
G	zwaar	R	-e-	L
	licht	L	-e-	R
E	zwaar	R	L	L
	licht	L	R	R
K	zwaar	L	R	-e-
	licht	R	L	-e-

figuur 2

Kader 2 – Nijlpaardenlogica

'I won't eat my hat.' De vertaling luidt: 'Ik eet mijn hoed niet op.' Het gezegde 'I eat my hat' wordt in het Engels gebruikt als men *zeker* is van een bepaalde uitkomst. De vertaling van 'I won't eat my hat' wordt daarom in het Nederlands het best benaderd door 'Ik durf mijn hand er niet voor in het vuur te steken'.

De laatste regel van het probleem luidt: 'If hippos eat acorns and squirrels hibernate in winter, then I'll eat my hat', en wordt na de komma vertaald als: 'eet ik mijn hoed *niet* op.' Dit is geen juiste vertaling. Het moet zijn 'eet ik mijn hoed op' of beter 'durf ik mijn hand in het vuur te steken'.

De juiste versie van het probleem volgt hieronder.

- Ik durf mijn hand er *niet* voor in het vuur te steken.
- Als nijlpaarden geen eikels eten, dan groeien er eikenbomen in Afrika.
- Als er geen eikenbomen in Afrika groeien, houden eekhoorns een winterslaap.
- Als nijlpaarden eikels eten en eekhoorns een winterslaap houden, dan durf ik mijn hand in het vuur te steken.

Dus... wat nu?

Oplossing – We gebruiken hoofdletters voor enkele uitspraken:

D = ik Durf mijn hand in het vuur te steken;

N = Nijlpaarden eten eikels;

B = eikenBomen groeien in Afrika;

E = Eekhoorns houden een winterslaap.

De logische afleiding daarmee staat *in*

figuur 3.

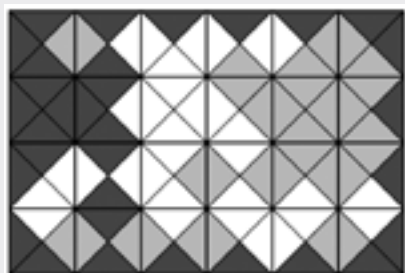
1. $\neg D$	conclusie van uitspraak a
2. $\neg B$	aanname
3. $\neg N \supset B$	nie uitspraak b
4. $\neg B \supset E$	nie uitspraak c
5. $N \wedge F \supset D$	nie uitspraak d
6. $\neg B, \neg N \supset B \vee N$	volgt uit 2 en 3; Modus Tollens
	en Jothuldeconclusie
7. $\neg B, \neg B \supset E \vee L$	volgt uit 2 en 4; Modus Ponens
8. $N, \neg N \wedge F$	volgt uit 6 en 7; Introductie
9. $N \wedge F, N \wedge F \supset D \vdash D$	volgt uit 8; Modus Ponens
10. D	!

figuur 3

Uit regel 1 en regel 10 (in figuur 3) volgt een contradictie.

De aanname $\neg B$ is dus *niet* juist. Dat wil zeggen dat er wél eikenbomen in Afrika groeien.

Kader 3 – McMahon's vierkanten



figuur 4

consequent doorgevoerd in de twee sets van de tweede wegging. In de tweede wegging doen ook munten mee gecodeerd met de letters M en F; en da's inderdaad gek. Bovendien ziet men in één oogopslag dat de tweede regel in de oplossingstabel fout is. De goede oplossing wordt gegeven *in kader 1*.

De *logica van een nijlpaard* is een probleem om lang over na te denken (pag. 140). Het gaat hierbij om het juiste redeneerpatroon. De premisse luidt: 'Ik eet mijn hoed niet op'. De conclusie luidt eveneens: 'Ik eet mijn hoed niet op'. Het probleem eindigt met: 'Dus... wat nu?' Het redeneerpatroon is kennelijk geldig. Dus inderdaad: wat nu? Uit de Engelse versie blijkt echter dat de conclusie verkeerd vertaald is. De conclusie luidt: 'ik eet mijn hoed wel op'. We hebben hier dus te maken met een contradictie. Er zit dus kennelijk een fout in een aanname (assumptie) binnen de afleiding. Het aardige van dit probleem is dat 'I won't eat my hat' een Engels gezegde is dat in het Nederlands het best benaderd wordt door 'Ik steek mijn hand hiervoor niet in het vuur'. Voor de oplossing *zie kader 2*.

McMahon's vierkanten (pag. 181). Door in een vierkant van (1×1) de diagonalen te trekken krijgen we 4 rechthoekige driehoeken met een hoekpunt in het

snijpunt der diagonalen. We hebben 3 verschillende kleurpotloden. Elk driehoekje krijgt een kleur. Met elk potlood mag je 0, 1, 2, 3 of 4 driehoekjes een kleur geven. Hoeveel echt verschillende vierkantjes krijg je? Dit blijken er 24 te zijn. Vervolgens wordt gevraagd, in een rechthoekig rooster van (6×4) , de vierkantjes zo in te kleuren dat alle vierkantjes verschillen van elkaar en de randen van de rechthoek één kleur hebben. Bovendien moeten de rechthoekjes met dezelfde kleur aan elkaar grenzen. De op pagina 290 gegeven oplossing is fout, wellicht veroorzaakt door het afdrukken van grijs tinten, waarbij grijs plotseling wit blijkt te zijn, zoals de ervaring leert. Onmiddellijk is te zien dat er gelijke vierkantjes in voorkomen. Voor een juiste oplossing *zie kader 3*.

Tot slot het *scrabblegrapje* (pag. 240). Dit grapje berust op de *letterwaarden* van de letters. Deze waarden zijn per land gestandaardiseerd en op internet te vinden. De letterwaarden in de Engelse versie van dit boek corresponderen inderdaad met deze standaard. De waarden die op pagina 240 gegeven zijn, corresponderen niet met de Nederlandse standaardversie. Wie met de standaardversie wil werken, kan de volgende website raadplegen:

<http://nl.wikipedia.org/wiki/Scrabble#Letters>

Over de auteur

Chris van der Heijden was van 1969 tot 2001 wiskundelid en later ook lid van de schoolleiding van de scholengemeenschap CSG Blaise Pascal in Spijkenisse.

E-mailadres: chris-van-der-heijden@wxs.nl

Impressies

VAN DE NVvW-DAG 2011

Nieuwe leden



A1 – Wiskundige denkactiviteiten

*Piet Versnel (Da Vinci College, Purmerend),
Hielke Peereboom (cTWO)*

[Gerrit Roorda]

Zowel de plenaire ochtendlezing als de workshop van Piet Versnel en Hielke Peereboom stond in het teken van de zogeheten Wiskundige Denk Activiteiten (WDA). Het lokaal is volgestroomd, alle 32 stoeltjes zijn bezet. WDA zijn blijkbaar hot. Maar wat zijn het precies?

In het eerste deel van de workshop wordt vooral in samenwerking met de aanwezigen gezocht een concretisering van WDA aan de hand van voorbeeldopdrachten. De voorbeelden die in de workshop naar voren komen, zijn te vinden in de presentatie op de site « www.fi.uu.nl/ctwo/WDA ».

De voorbeelden maken mij twee dingen duidelijk. In de eerste plaats dat er bijzonder leuke, zinvolle opdrachten te bedenken zijn die afwijken van standaardsommen en die goede mogelijkheden bieden om leerlingen te stimuleren tot nadenken. In de tweede plaats dat de werkgroep WDA nog hard op zoek is naar een eenduidige invulling van het begrip WDA. Mijn samenvatting zou zijn dat leerlingen gestimuleerd kunnen worden tot Wiskundige Denk Activiteiten wanneer zij opdrachten maken die niet routinematig zijn op te lossen.

In het tweede deel proberen we examenopdrachten aan te vullen met opdrachten die leerlingen tot denken aanzetten. Vragen die aan het eind van de workshop blijken te leven zijn: Hoe wordt WDA getoetst? Wat betekent dit voor mijn manier van lesgeven? Al met al blijkt dat in een tijd waarin weer veel aandacht gekomen is voor trainen op algebraïsche vaardigheden, docenten hernieuwd op zoek gaan (en moeten gaan) naar opdrachten en werkwijzen om leerlingen tot nadenken te stimuleren. Wat mij betreft een opdracht voor elke wiskundeleraar: altijd zoeken naar manieren om het denken te bevorderen.

A2 – Redeneren en discussiëren bij integraalrekening; het werkt!

*Lidy Wesker (Bonhoeffer College, Castricum),
Sonia Palha (UvA, Amsterdam)*

[Ernst Lambeck]

Integraalrekening is op de middelbare school veelal een eenzijdige activiteit. De opgaven zijn meestal van het type

‘Bereken...’. Als er in een methode al iets meer gebeurt, dan organiseren de auteurs het leerproces en zijn de leerlingen in feite toeschouwers, zoals bijvoorbeeld bij vragen van het type ‘Wat valt er op bij/als...’.

Sonia Palha en Lidy Wesker hebben in een onderzoek een aantal opdrachten van het boek vervangen door werkbladen. Daaraan is in de klas gewerkt door heterogeen samengestelde groepjes van drie leerlingen. In de werkgroep werden twee voorbeelden besproken. Hierbij werden videobeelden van het werken in de klas getoond.

Het eerste werkblad toonde een grafiek van een niet nader genoemde functie met de oppervlakte eronder. Gevraagd werd de oppervlakte $O(a) = \int_0^a f(x)dx$ tussen $x = 0$ en $x = a$ te schatten door hokjes te tellen en daarna de grafiek van O als functie van a te schetsen. Dit leidde bij de leerlingen onder meer tot de discussie of het punt bij $O(3)$ boven 2,5 of boven 3 moest komen.

Het tweede werkblad ging in op de rol van de integratieconstante. Gegeven was de functie $f(x) = 3x$. Met VU-grafiek werd de oppervlaktefunctie van -2 tot x geschetst. Het programma toonde een parabool met top $(0, -6)$. De leerlingen kenden op dat moment de primitieve functie $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, die een parabool met top $(0, 0)$ zou geven. Wat was er aan de hand? De kracht van de werkbladen, vergeleken met het boek, was het bevorderen van wiskundige denkactiviteiten: er werd in de klas gepraat over integraalrekening en niet alleen maar ‘meters’ (sometjes) gemaakt. De leerlingen gebruiken hun kennis om te discussiëren over integraalrekening, om wiskunde te begrijpen en uit te leggen. Kortom, een actieve leerhouding van de leerlingen.

A3 – Het eerste pilotexamen havo wiskunde A. Heeft het gewerkt?

*Heleen Traas (Goudse Scholengemeenschap
Leo Vroman), Theo van den Bogaart (cTWO)*

[Ger Limpens]

Onder leiding van Heleen en Theo werd ingegaan op het eerste pilotexamen havo wiskunde A. Het doel van de bijeenkomst was tweeledig: informatieverstrekking en een (kleine onofficiële) veldraadpleging. Dat laatste diende gezien te worden in het licht van het cTWO-advies dat volgend jaar geschreven dient te worden. Na een schets van de achtergronden vanaf de start van cTWO in 2005 gaf Theo aan zich tijdens

de workshop te willen concentreren op drie belangrijke veranderingen ten opzichte van het eerdere wiskunde-A-programma, te weten a) statistiek, b) onderzoeksaspect en c) algebra. Heleen vertelde over de wijze waarop zij met haar leerlingen gewerkt heeft, gebruik makend van Digibook (voor iedereen te benaderen via de link op de site van cTWO: www.ctwo.nl) en over de nadruk die er in binnen het cTWO-programma ligt op het werken met grote datasets. Zij gaf aan dat deze aanpak op basis van realistische data de materie voor leerlingen toegankelijker maakt, maar ook wel erg leunt op ICT en de ondersteuning daarvan binnen een school. Zijdelings kwam, vanuit de zaal, hier (en later tijdens deze sessie) het geluid dat het misschien toch wel erg jammer is dat er binnen het cTWO-programma geen aandacht meer is voor statistiek en kansrekening op het Centraal Examen met alle gevaren voor ondersneeuwen van deze materie in het onderwijs van dien. Het aspect 'onderzoek' werd geadstrueerd aan de hand van de onderzoekopgave op het pilotexamen havo wiskunde A 2011-1 'Parkstad Limburg'. Deze opgave werd niet als het ultieme voorbeeld gezien van de vleesgeworden vernieuwing in dit kader, maar gaf toch wel een beeld van de richting: een opgave met één vraag met redelijk wat punten aan het eind van het examen. Het derde thema 'algebra' leidde tot een discussie in hoeverre algebra *an sich* moet binnen dit programma. Algebra omwille van de algebra werd niet door allen als zinvol ervaren. Heleen gaf desgevraagd aan dit nieuwe programma niet als een verzwarende ten opzichte van het huidige havo A-programma te ervaren. Als gevolg van een duidelijk verkleind domein Kansrekening houdt je tijd over, zo was haar ervaring. Ze constateerde verder dat er op dit moment wel nog een grote behoefte is aan meer en geschikter lesmateriaal, vooral rond de onderzoeksopgaven.

A5 – Tussendoelen onderbouw havo/vwo
Nelleke den Braber (SLO), Peter van Wijk (cTWO)

[Joke Verbeek]

Deze workshop trok weinig belangstellenden, misschien wel omdat de invoering van de tussendoelentoets pas wordt verwacht in

schooljaar 2014-2015.

Peter en Nelleke gingen in op het waarom van de tussendoelen en het probeerden ook de deelnemers een idee te geven over het 'wat'.

Waarom tussendoelen – Aanleiding voor het maken van tussendoelen was een slechte uitkomst van een Pisa-meting. Er werd daarna een actieplan opgesteld, 'Beter presteren', waarin geconcludeerd werd dat voor de kernvakken Nederlands, Engels en wiskunde een beschrijving zou van het gewenste niveau zou moeten komen, compleet met een toets. Voor havo en vwo komt de toets aan het eind van het derde leerjaar, voor vmbo aan het eind van het tweede leerjaar.

Zo'n tussenmeting is een diagnostische toets en mag niet gebruikt worden om leerlingen, docenten of scholen 'af te rekenen'. Er komen toetsen op verschillende niveaus, van basisberoepsgericht tot en met vwo, waarbij voor havo en vwo gedacht wordt aan het maken van een versie voor wiskunde A, wiskunde B en wiskunde C. De toets gaat, net als de examens, over het 'wat', niet over het 'hoe'. De SLO is bezig met het maken van zo'n 50 proefopdrachten die, nadat ze zijn getest, beschikbaar zullen komen voor het onderwijsveld.

Wat zit er in de tussendoelen – De tussendoelen wiskunde onderbouw havo/vwo zijn een beschrijving van hetgeen leerlingen zouden moeten kennen en kunnen aan het eind van de onderbouw. Het is een beschrijving van de gewenste situatie, dus niet van de bestaande. Ze zijn bedoeld om een soepele overgang naar de bovenbouw te bewerkstelligen. Voor havo/vwo betekent het een versterking van de algebraïsche vaardigheden. Uiteraard is er gekeken naar hetgeen cTWO voor de nieuwe examens van 2015 heeft beschreven en waarin open vragen zonder tussenstappen zullen voorkomen. Daar moeten leerlingen op getraind worden, ook al in de onderbouw. De beschrijving van de tussendoelen havo/vwo is te vinden op het internet. Voor het vmbo is de beschrijving nog niet klaar, maar daar wordt aan gewerkt.

B1 – Rekentuin.nl, spelenderwijs oefenen en meten van rekenvaardigheid

Bestuur en organisatie



Markt



*Marthe Straatemeier (CEO Oefenweb.nl),
Monique Seijsener (Mondriaan vmbo met havo)*

[Irene Hof]

Rekentuin is een web-applicatie waarin leerlingen het rekenen kunnen oefenen. De achterliggende gedachte achter dit rekenprogramma was om de rekenschriftjes van de leerlingen digitaal te maken. In eerste instantie was het bedoeld voor het basisonderwijs, maar het blijkt ook in het voortgezet onderwijs goed te gebruiken. De oefenstof is afgestemd op het niveau van de leerling. Er is een nieuwe methode voor CAT (= computer adaptief testen) ontwikkeld die gebaseerd is op het *rating systeem* dat bij schaakwedstrijden wordt gebruikt (en ook bij tennis). Indien je een wedstrijd wint van een hele goede schaker, dan verdien je veel punten; win je van een schaker die iets beter is dan jij, dan verdien je minder punten.

Leerlingen spelen bij *Rekentuin* tegen de computer; bij moeilijke sommen verdienen de leerlingen veel muntjes en bij makkelijke minder. Iedere leerling maakt 75% van de sommen goed en het programma past na elk antwoord het niveau van de sommen aan. Hierdoor wordt de leerling uitgedaagd nog meer sommen te maken.

Een docent kan per leerling zien waar deze zwak in is en hoe vaak hij gewerkt heeft in *Rekentuin*. Tevens zie je als docent bij een leerling de sommen staan die hij goed of fout gemaakt heeft. Zo kun je je instructie naar de leerling toe heel expliciet geven. Op dit moment zijn er contacten met SLO om de sommen te laten toetsen aan de referentieschalen.

Tijdens de workshop mochten we zelf in een demo-omgeving werken. Het zag er goed uit; we dachten eerst dat het misschien te kinderlijk zou zijn voor middelbare scholieren, maar uit de praktijk bleek dat leerlingen dit niet storend vinden.

Ook zagen we nog hoe een docenten-omgeving er uit ziet aan de hand van klassen die met *Rekentuin* gewerkt hebben. Ik ben in ieder geval enthousiast geworden en ga het bij mij op school bespreken. Meer informatie is te vinden op « www.rekentuin.nl » waar je ook in een demo-omgeving kunt kijken.

B3 – Rekenen, ook in andere vakken, vmbo

Monica Wijers, Vincent Jonker (beiden: FIsmc, Universiteit Utrecht)

[Joke Verbeek]

In het referentiekader Rekenen staat over rekenen de aanbeveling: ‘... moet voor een belangrijk deel plaatsvinden tijdens

het toepassen in andere leergebieden en praktijksituaties.’

Toch wordt bij rekenen tot nu toe vooral gedacht aan de wiskundelessen. Het Freudenthal Instituut heeft daar onderzoek naar gedaan en allereerst gekeken of er rekenen voorkomt in syllabi en examenprogramma's van andere vakken. Ook is er veldonderzoek gedaan en aan docenten vmbo gevraagd of zij kans zien rekenen te integreren in hun vak. De uitkomst daarvan liet zien dat docenten van de avo-vakken daar nauwelijks kans toe zagen, maar docenten van de beroepsgerichte vakken wel. De problematiek van rekenen is groot op het vmbo. De leerlingen komen veelal met een niveau onder dat van 1F binnen. Wel wordt verwacht dat ze uitstromen op niveau 2F, maar het zal duidelijk zijn dat dat niet haalbaar is voor een belangrijke deel van vooral de basisberoepsgerichte leerweg-leerlingen. Inspanning kan van wiskunde maar ook van andere vakken worden gevraagd.

In de bovenbouw heeft 20% van de leerlingen geen wiskunde meer. Voor leerlingen uit de sector Zorg en welzijn geldt dat zelfs voor 40 tot 60%. Daar zouden aparte rekenlessen maar vooral ook beroepsgerichte vakken het niveau van de leerlingen kunnen helpen verhogen. In de examens van de beroepsgerichte vakken zijn ook voorbeelden gevonden van rekenen.

De (weinig) aanwezigen bekeken die opgaven en scoorden ze op referentieniveau. Over het algemeen kan gesteld worden dat de vraagstelling moeilijk was, maar de rekenvaardigheden relatief eenvoudig. Er moest handelend worden gerekend in complexe situaties.

Docenten die zelf het rekengehalte van examenvragen willen analyseren, kunnen via de website van het FIsmc de rekenopgaven van de examens scoren.

B6 – Rekenexamens in havo/vwo

Victor Schmidt (SLO)

[Martin Kind]

Ze komen er aan, de rekentoetsen 3F in het vo! De Eerste en Tweede Kamer hebben het wetsvoorstel ‘Referentieniveaus Nederlandse taal en rekenen’ in het voorjaar 2010 aanvaard, en nu is de implementatie aan de beurt. In het schooljaar 2013-2014 worden de eerste toetsen op 3F-niveau, meetellend bij het eindexamen, afgenomen. Victor Schmidt, voorzitter van de commissies die in opdracht van het ministerie de toetswijzers hebben samengesteld, geeft in zijn workshop een toelichting. Onze huidige 4-vwo'ers en 3-havo'ers, onafhankelijk van hun profiel, krijgen er al mee te maken. Alle

leerlingen in deze groepen, ook havo-leerlingen zonder wiskunde in het pakket en alle CM-leerlingen moeten de toets maken. Hoe telt de rekentoets mee bij het eind-examen? Voor de rekentoets (rekenexamen mogen we niet zeggen!) moet in de eerste twee jaar na invoering minimaal een 5 gehaald worden. Lager dan een 5 betekent gezakt voor het hele examen. Daarna telt de rekentoets mee in de regeling voor de eindcijfers van Nederlands, Engels en wiskunde. Herkansing is éénmaal mogelijk. De rekentoets blijft buiten de regel dat minimaal een 5,5 gehaald moet worden voor de examenvakken. De rekentoets wordt digitaal afgenomen. Pilots vinden dit schooljaar al plaats (in maart). Informatie is te vinden op

www.steunpunttaalenrekenen.nl

Waar gaat de toets inhoudelijk over? Hierover is een 'Servicedocument bij de toetswijzers 2F en 3F vo' verschenen (ook te downloaden via bovengenoemde website). De toets bestaat voor 80 tot 85% uit contextvragen, voor 15 tot 20% uit kale rekensommen (van niveau 1F, maar in het geval van opgaven over breuken ook van niveau 1S). De rekenmachine mag bij deze kale sommen niet worden gebruikt. Bij de andere sommen wordt per som een digitale rekenmachine bijgevoegd. De domeinen zijn getallen, verhoudingen, meten/meetkunde (maar meer meten dan meetkunde) en verbanden. Er wordt getoetst op niveau 3F, het niveau van functioneel rekenen, gericht op basale inzichten en op een meer toepassingsgerichte benadering van rekenen. Niveau 3S wordt volgens de huidige wet- en regelgeving niet getoetst. Dit laatste niveau begint te neigen naar wiskunde en is meer gericht op abstractie, generalisatie en formalisatie. Het 3F-niveau wordt als volgt omschreven.

De leerling:

- kan de rekenkundige vaardigheden uit 1F en 2F inzetten in complexe situaties, vooral die aan een beroep gerelateerd zijn;
- kan termen en begrippen uit een beroepssituatie in verband brengen met rekenkundige termen en begrippen;
- kan numerieke en ruimtelijke informatie uit verschillende bronnen combineren om conclusies te trekken en berekeningen te maken

Zo langzamerhand komen toetsen beschikbaar en deze kunnen op bruikbaarheid worden getoetst.

C1 – De kracht van ICT

Wim Grosheide, Mark Dackus (beiden: Hermann Wesselink College, Amstelveen)

[Marjanne de Nijs]

In 2007 won Wim Grosheide de Wiskundeschoolenprijs voor zijn project 'Wiskunde zonder boek'. Later op de dag zal hij plenair aan Dédé de Haan vertellen hoe dit zijn leven veranderde, maar eerst mag ik zijn workshop bijwonen. Samen met collega Mark Dackus laat hij zien hoe ze ICT in de klas gebruiken voor de lessen rekenen en algebra. De leerlingen van klas 1 en 2 gebruiken in de klas dus geen boek maar voor iedereen is er een computer. Daarachter oefenen ze hun vaardigheden in de Digitale Wiskunde Omgeving (DWO) van het Freudenthal Instituut. Om het hele curriculum af te dekken zijn er inmiddels al 50 eigen modules geschreven in deze DWO. Het ziet er prachtig uit en het is niet moeilijk in te zien dat er op het Hermann Wesseling College hard gewerkt is om dit project inhoudelijk goed vorm te geven.

Voordeel is dat er van de vorderingen van elke leerling een digitaal overzicht is, nadeel is dat de DWO niet dominant genoeg is op de computer om het internet uit te sluiten. Als toetsomgeving is het daarom niet altijd geschikt. Mark Dackus laat zien dat hij instructievideo's maakt voor leerlingen die extra uitleg nodig hebben. Thuis achter zijn computer met een digitaal schrijfbord en een headset op neemt hij de filmpjes op. Advies van hem is om gewoon te beginnen, houd het eenvoudig en probeer geen perfectie na te streven. Je kan dagen met zo'n video bezig zijn maar het gaat om de inhoud, en de vormgeving mag best wat ondergeschikt zijn. Met een uurtje heb je een prima instructiefilmpje waarnaar je leerlingen kan verwijzen. Hij krijgt positieve reacties van leerlingen die er echt baat bij hebben om een uitleg meerdere keren te bekijken. Bij de projecten op deze school gebruiken ze ook veel andere programma's: GeoGebra, PowerPoint, Excel en SketchUp. Dit laatste is een 3D-ontwerpprogramma dat zeer geschikt is om in te zetten bij Ruimte meetkunde. Ik vond het inspirerend. Voor de meesten van ons is het op korte termijn niet mogelijk om de hele methode de deur uit te doen en dat hoeft ook niet. Maar af en toe het boek links laten liggen en een onderwerp digitaal aanbieden past wel erg in deze tijd. Op de website « www.wiskundezonderboek.nl » is over alle aspecten van deze workshop informatie te vinden.

C3 – Digiborden. Leuk, maar wat kan ik er nou écht mee?

Hub Kusters (Sint-Janscollege, Hoensbroek)

C5 – Meetkundige bewijzen, noodzaak en nut van GeoGebra-gebruik.

Gaspare Campisi (Bonhoeffer College, Enschede), Fokke Hoeksema (Marianum, Groenlo), Ronnie Koolenbrander (Rietveld Lyceum, Doetinchem),

Workshops



Plenair



Roelf Haverkamp (Erasmus, Almelo), Nellie Verhoef (Universiteit Twente)

[Wout de Goede]

C3 – Uit pure nieuwsgierigheid naar nieuwe ontwikkelingen (ik ben een oudgediende, die in 2005 noodgedwongen gestopt is met actief onderwijs geven) bezocht ik deze workshop. Mijn ervaring met moderne hulpmiddelen stopt bij het gebruik van een beamer en een in de 'toonbank' ingebouwde glasplaat met een contraptie erboven die een camera bevat. Als ik een overheadsheet op de glasplaat legde en ik gaf met een schakelaar aan dat ik 'onderbelichting' wilde, werkte het apparaat als een gewone overhead-projector. Als ik bijvoorbeeld mijn GR onder het ding legde en ik gaf 'bovenverlichting' projecteerde de camera de GR boven mijn hoofd (en boven het gewone whiteboard) op een scherm. Ook in het boek kon ik op die manier in een plaatje iets aanwijzen. Een vervolg (en uiteraard een verbetering) op de epidiascoop: een apparaat ter grootte van enige kubieke meters, waarmee de biologieleraar in mijn HBS-tijd de meest merkwaardige zaken vertoonde.

Hub Kusters liet zien dat je met zo'n digibord echt vrijwel alles kunt. Wat ik verreweg de mooiste toepassing vond: Je bereid een les grondig voor. Slaat alles wat je gaat doen en zult laten zien op en tijdens de les sla je ook de aantekeningen op die je vroeger op het linker zijbord maakte en dan weer wegveegde, maar die je nu gewoon schrijvend even 'snel' op de aantekenserie van het bord maakt. Na de les zet je de hele zaak op de elo (elektronische leeromgeving), die er in mijn tijd ook al was (dus ik wist waarover het ging) en iedereen die de les niet heeft bij kunnen wonen, kan erbij als hij dat wil.

Tot mijn verbazing hoorde ik ook dat er meerdere merken interactieve whiteborden bestaan, elk met hun eigen bijbehorende software-trucjes. Maar bij nader inzien snap ik eigenlijk best dat ik daar niet van hoef op te kijken: natuurlijk stort de ict-wereld zich op die markt.

Er waren al wat gebruikers van interactieve borden in de zaal, maar er ontstond tot mijn genoegen niet zo'n technische discussie vol termen, die de anderen niet kennen. Daardoor kan namelijk de hele workshop zich gaan afspelen boven de hoofden van simpele zielen als ik en zit ik er voor Piet Snot bij.

Hub Kusters voorkwam dat, waarschijnlijk niet alleen bewust, maar ook omdat de aanwezige kenners gewoon niet durfden. Hij demonstreerde een dusdanige kennis van

en ervaring met deze materie dat ik het wel weet: als ik ooit iets met een digibord moet, neem ik contact op met collega Kusters.

C5 – GeoGebra is gratis van internet te halen educatieve wiskunde software. Freaks (waaronder ik mijzelf niet reken) van over de hele wereld werken ermee en ook eraan, waardoor het steeds groter en beter wordt, en er is een uitgebreid gebruikersforum. Een geweldig programma vind ik en daarom (en omdat ik van meetkunde hou) bezocht ik deze middagworkshop. Eigenlijk is 'workshop' niet zo'n goede naam voor wat er in C5 plaatsvond: we hoefden namelijk niet zelf te werken maar een aantal collegae van diverse scholen bracht verslag uit van hun ervaringen met hetzelfde brokje lesstof, en Nellie Verhoef, die bij deze zogenoemde 'Lesson Study' (zie [1]) groepjes leerlingen had geobserveerd, lardeerde hun verhaal met haar observaties, terwijl wij ons er ook mee mochten bemoeien.

De gang van zaken: na een introductie door Fokke werd een deductieve aanpak door Roelf ingeleid en geïllustreerd en vervolgens deed Caspare hetzelfde met een inductieve aanpak met GeoGebra.

Het onderdeel 'In vier groepen vaststellen: Hoe hadden jullie dit (beter) gedaan?' sloegen we over en we gingen meteen over op de 'Plenaire discussie' onder leiding van Nellie (de ervaringen in de ochtendsessie waren de oorzaak van deze wijziging in de opzet).

Een (vrij levendige) discussie met waardevolle opmerkingen en aanwijzingen van deelnemers uit de zaal besloot het geheel.

C4 – Digitaal leren en toetsen

Evert van de Vrie, Johan Jeuring (Open Universiteit)

C6 – Digitaal lesmateriaal ontwerpen met GeoGebra en de DWO

Peter Boon, Sietske Tacoma (beiden: Flsme, Universiteit Utrecht)

[Metha Kamminga]

Dit keer niet meer in functie als bestuurslid maar overal praatjes maken met bekenden en volop genieten van de strak geplande, goedgeorganiseerde studiedag.

Andere jaren kwam ik niet toe aan het bijwonen van workshops en dat was jammer, want het is toch wel erg leuk en interessant allemaal en volop keuze. Jammer dat er niet meer tijd is, ik kan er maar twee uitkiezen.

C4 is een workshop met een duo-presentatie. Eerst komt Johan Jeuring aan de beurt in deze goedbezochte workshop met een presentatie over Math-Bridge. Er

wordt hier werkelijk Europees gedacht! Deze online leeromgeving voor wiskunde-aansluitingsonderwijs is al een eind op weg om maatwerk te kunnen leveren en er is er al veel werk verzet. Verbazend is het om te zien met wat voor perikelen men toch wel te maken heeft als er geswitcht wordt tussen de verschillende Europese talen. Je zou denken dat wiskunde toch wel internationaal is, maar dat valt hier en daar wel wat tegen op notatiegebied. Voor de rest wordt er druk verder gewerkt in het Math-Bridge-project op het gebied van feedback en formule-faciliteiten en is alles nog lang niet af wat deze omgeving betreft. Dit is precies iets voor Sibren Stienstra en Oscar van der Schaaf! Deze twee jonge leraren uit Leeuwarden, die zelf een prachtige en unieke tool ontwikkeld hebben op het gebied van het oplossen van vergelijkingen, gebaseerd op open source, moeten beslist even met Johan Jeuring in contact worden gebracht. Ik stuur ze gauw een sms-je of ze na afloop hierheen willen komen. Maar eerst vertelt Evert de Vrie in deze workshop nog over het Surf-project ONBETWIST waarin een database van wiskunde items en toetsen wordt neergezet en door iedereen te gebruiken zal zijn. Het project loopt nog en er zal voor elk wat wils bij zijn. Hou ze in de gaten!

Als de workshop ten einde loopt hebben Sibren en Oscar intussen al stilletjes op de achterste bank plaatsgenomen met hun laptop en ik kan ze dan meteen voorstellen aan Johan die zeer geïnteresseerd is en zelfs de tijd neemt om even te kijken wat ze gemaakt hebben. Netwerken doe je dus ook op de NVvW-studiedag met al die interessante mensen die er dan rondlopen.

C6 – Wie kent niet de GeoGebra software? Maar niet iedereen weet dat deze software bij de Digitale Wiskunde Omgeving van het Freudenthal Instituut ook als toets-tool kan worden ingezet. Het is verbazend om te zien hoe snel de geïnteresseerde deelnemers van deze workshop, na de snelle en doeltreffende introductie van Sietske, al iets zelf kunnen maken met deze tool. Hulde aan Peter en Sietske! En wat wordt er aan de weg getimmerd! Dus niet alleen algebrasommen, maar nu kan dus ook meetkundig inzicht getoetst worden. Inderdaad, binnen het bereik van iedere docent die bij de DWO is aangesloten. Moet je wel een fan zijn van GeoGebra, maar wie is dat niet?

D4 – Opbrengstgericht werken: hogere leeropbrengsten of een toetscircus?

Jos Tolboom (SLO)

[Ger Limpens]

Jos Tolboom geeft in zijn introductie aan zijn uitnodiging in de informatieverzaffing van deze studiedag bewust niet al te wervend geschreven te hebben. Het idee was circa 15 mensen per workshop aan de slag te hebben. Of die zelf geformuleerde opdracht succesvol is? De workshop wordt door circa 20 mensen bezocht... Jos, ict-matig ondersteund door Watze Winsemius, manager van SuperConnie, besteedt aandacht aan de definiëring van 'opbrengstgericht werken', zijnde het vergroten van de gerichtheid, c.q. de leeropbrengst. Daarbij kan ICT ingezet worden om voortgangsgegevens van leerlingen te verzamelen en te registreren. Verschillende studies geven aan dat onderwijs dat op basis van gegevens uit formatieve toetsen (bij)gestuurd wordt, forse effecten te weeg kan brengen. Die effecten vereisen wel, onder andere, een zelfkritische houding van docent zowel als leerling. Jos maakt bij dit project gebruik van Smart-s, een verzameling web-based werkboeken waarbij leerlingen (van, op dit moment, vijf aan dit project participerende scholen) digitaal aan de slag kunnen met, op dit moment, voornamelijk vrij 'technische' wiskundeoefeningen (zie www.smart-s.nl). Die opgaven zijn voorzien van hints en correctiestructuur en bieden de docent de mogelijkheid om van iedere leerling achteraf te zien welke vragen goed/fout beantwoord werden en ook inzicht te krijgen waar een leerling de fout in ging. Tijdens de workshop kan geoefend worden als leerling. Na afloop daarvan wordt nagegaan wat men ervan vindt. De houding van de aanwezigen is, zoals dat wiskundedocenten wel betaamt, redelijk kritisch. In hoeverre weet je, als je deze applicatie gebruikt, of het inzicht van een leerling nu vergroot is? En: wat voegt dit toe aan wat je vroeger als docent in de les deed? Of: ligt het gevaar van *Big Brother* niet erg op de loer als alles wat je als leerling doet misschien wel tot in lengte van dagen digitaal opgeslagen wordt? Aan de andere kant: specifiek deze aanpak lijkt de meest veelbelovende 'tool' en is, wegens die web-based aanpak, ook misschien wel het meest flexibel. Kortom: een leerzame ervaring, maar het is nog niet helder wat we er uiteindelijk van kunnen verwachten.

Fotografie

Marianne Lambriex en Dolf van den Hombergh

Noot

- [1] Nellie Verhoef (2011): *Lesson Study*, deel 1. In: *Euclides* 87(3); pp. 111-113.
Nellie Verhoef (2012): *Lesson Study*, deel 2. In: *Euclides* 87(4); pp. 144 - 147.

Plenair





Vaknetwerken

[Douwe van der Kooi]

Ik zal het nooit vergeten, lang geleden toen ik begon als wiskundeleraar. Als vanzelfsprekend werd je lid van 'de vereniging'. Je ging naar de cursussen die destijds door het (onvolprezen) IOWO werden georganiseerd, de A-cursus, de B-cursus, de C-cursus, tot en met de D-cursus, als ik me wel herinner. Tweeënhalve dag op de hei, beter worden in je eigen les, alles ten faveure van het wiskundeonderwijs. En overall kwam je elkaar weer tegen, wisselde je uit en maakte je plannen. Het gebeurde allemaal in de jaren '70 van de vorige eeuw. Als jong broekie was het ook vanzelfsprekend dat je ging participeren in zogeheten regionale bijeenkomsten, die door de vereniging werden georganiseerd. Dat waren bijeenkomsten van collega's van verschillende scholen die samen de wildste ideeën hadden, uitwerkten en uitprobeerden in de klas. Over normjaartaak, inzet en tijd werd niet gesproken. Het begrip professionele ruimte moest nog worden uitgevonden; ook van *geoordeeld* nascholingsgeld had nog nooit iemand gehoord. Zoals gezegd, het was vanzelfsprekend dat je aan die dingen deelnam. Niettemin kwam in de loop van de jaren '80 het klad in die regionale bijeenkomsten.

Inmiddels schrijven we 2012. Er wordt een groot probleem geconstateerd in het onderwijs. In de zogenoemde tekortvakken is temet geen docent meer te krijgen. Wiskunde is zo'n tekortvak. Het ontbeert de wereld vooral aan eerste-graders, maar het aantal vacatures in de tweede-graads sector is eveneens groot. Kijk vanaf april maar in de weekendedities van *de Volkskrant*. Er is geen school in Nederland of er wordt wel een wiskundeleraar gevraagd. De lerarenopleidingen hebben last van wat men is gaan noemen 'groenpluk'. Dat is het aanbieden van banen aan onbevoegde docenten die nog als student in opleiding

zijn. Het leidt tot studievertraging met alle gevolgen van dien.

Een ander fenomeen is de uitval van docenten in de *inductiefase*. Van de vijf startbekwame docenten is er één binnen vijf jaar na afstuderen vertrokken uit het onderwijs om er nooit meer in terug te keren. Dat is een vorm van kapitaalvernietiging die tegen het licht van de personele nood bijzonder jammerlijk is. De Commissie Onderwijs van het Platform Wiskunde Nederland heeft zich deze problematiek aangetrokken. Binnen de commissie houdt een subcommissie zich bezig met certificering van nascholing in het kader van de beroepsregistratie en met de vraag hoe pasafgestudeerden gebonden en geboeid blijven binnen het onderwijs. Daartoe is de oude praktijk van het vaknetwerk nieuw leven in geblazen.

Wat gebeurt er zoal in zo'n vaknetwerk?

Het alumni-netwerk in Amsterdam is in april 2011 opgericht door alumni van ILO (Interfacultaire lerarenopleidingen van de UvA), het Onderwijscentrum VU en de Hogeschool van Amsterdam (bachelor en master) samen met docenten van genoemde opleidingen. Doel van het netwerk is tweeledig: voor de deelnemers uitwisseling van 'good practices' en voor de opleiding is het een platform om het didactiekprogramma regelmatig te spiegelen met hetgeen er leeft in de praktijk en de goede ideeën die daar zijn ontwikkeld, in te brengen in de didactieklessen, zodat het opleidingsprogramma bij de tijd blijft.

Op de eerste bijeenkomst is een aantal thema's vastgesteld waarmee het netwerk verder wilde. Voorbeelden: training voor examens, gebruik van digitale hulpmiddelen, tellen, op speelse wijze leren van algebraïsche vaardigheden, speelse

praktijken in de rekenles, enzovoort. Er is een agenda vastgesteld voor 2011-2012, waarbij het netwerk bijeenkomt op de school van degene die inhoudelijk verantwoordelijk is voor het thema. Die alumnus verzorgt ook de uitnodiging. Inmiddels heeft het vaknetwerk een cultuurwerkplaats-subsidie verworven. Op het snijvlak van wiskunde en kunst wordt lesmateriaal ontworpen door alumni van het netwerk samen met studenten van de opleiding. Daarbij ligt de focus op het wiskunde C-programma, maar wiskunde en cultuur is ook een interessant gebied voor vakoverstijgende projecten in de onderbouw. Midden januari wordt op de Open Schoolgemeenschap Bijlmer een start gemaakt met het vaknetwerk als cultuurwerkplaats. Het is de bedoeling dat producten van het netwerk voor iedereen toegankelijk worden. In *Euclides* zal verslag worden gedaan en op de NVvW-jaardag zullen presentaties worden verzorgd.

Tot slot

Ik wil graag in contact komen met vaknetwerken om te komen tot een inventarisatie. Momenteel zijn er, voor zover ik weet, vier (vijf) vaknetwerken: twee vanuit de ELAN (Universiteit Twente) onder leiding van Nellie Verhoef en Gerard Jeurnink en twee in Amsterdam (regio Noord Holland).

In de 'Community of Learners' van Nellie Verhoef gaat het erom de vertaling van Lesson Study (zie [1]) te maken naar de wiskundeles. Het Docent Ontwerp Team wiskunde-D van Gerard Jeurnink is samengesteld uit docenten die het vak aanbieden in videoconferencing (zie [2]). Iedere maand komt de Twentse groep (11 docenten) bij elkaar om modules te ontwerpen die in een video-setting kunnen

worden uitgevoerd.

Overigens is er ook in West-Nederland zo'n team (5 docenten), dat zelfstandiger opereert en ieder kwartaal bij elkaar komt (naast overleg via de videoverbinding). Voor beide DOT's is Gerard Jeurnink de contactpersoon. In Amsterdam is naast bovengenoemd netwerk, dat onder leiding staat van Lidy Wesker en ondergetekende, een tweede vaknetwerk actief onder leiding van Gertjan Laan, docent aan de tweede graads opleiding wiskunde op de Hogeschool van Amsterdam. Dit netwerk houdt zich exclusief bezig met de thematiek van 'wiskunde zonder boek'.

OVERZICHT VAKNETWERKEN		
Regio	Contactpersoon	E-mailadres
Twente (Docent Ontwerp Team)	Gerard Jeurnink	g.a.m.jeurnink@utwente.nl
West-Nederland (Docent Ontwerp Team)	Gerard Jeurnink	g.a.m.jeurnink@utwente.nl
Twente (Community of Learners)	Nelly Verhoef	n.c.verhoef@utwente.nl
Amsterdam 1/Noord-Holland (Community of Practice)	Gertjan Laan	g.j.m.laan@hva.nl
Amsterdam 2/Noord-Holland (Vaknetwerk Wiskunde)	Lidy Wesker/ Douwe van der Kooi	L.J.B.Elzinga@hva.nl d.van.der.kooi@hva.nl

Ik zal te zijner tijd in *Euclides* berichten welke netwerken in welke regio's actief zijn en wie de contactpersonen zijn, zodat wiskundeleraars weten bij wie ze zich kunnen voegen om in een *community of practice* te kunnen participeren.

Referenties

- [1] Nellie Verhoef (2011): *Lesson Study*, deel 1. In: *Euclides* 87(3); pp. 111-113.
Nellie Verhoef (2012): *Lesson Study*, deel 2. In: *Euclides* 87(4); pp. 144 - 147.
- [2] Monique Böhm, Gerard Jeurnink (2012): *Wiskundeles via videoconferencing*. In: *Euclides* 87(4); pp. 139-141.



Meet je Rekenkracht WWW.REKENBETER.NL met Rekenbeter!

[Sieb Kemme]

Doordenker 87-4

In 1993 verscheen bij Uitgeverij L.J. Veen de bundel *Knars, 45 hersenkrakers*, van de hand van Hans Quené. De bundel bevat een aantal puzzels die eerder in de wekelijkse rubriek 'Knars' in *de Volkskrant* zijn verschenen. Voor *rekenbeter.nl* hebben we er al een aantal keren een Doordenker uit gehaald. De puzzels zijn prettig leesbaar en op een uitdagende manier in een verhaal verpakt waardoor de lezer als vanzelf het probleem wordt ingezogen. Met een beetje geluk lukt het nog om het boekje op de tweede handsmarkt te bemachtigen. De volgende puzzel is letterlijk uit de bundel overgenomen (pag. 26). Een oplossing staat op pagina 91 van het boekje. Daar mag u niet naar kijken!

In omgekeerde richting

Volgeschreven kladblaadjes breng ik naar de papierbak, toch ontroeren autosnelwegen me elke keer opnieuw. Leve de vrijheid! Binnen vier uur ben je in Parijs, geen probleem. Tandborstel en paspoort mee, verder zien we wel. En vannacht kunnen we in Polen zijn.

Zo waren mijn vriendin en ik vorige week op weg naar mijn broer om keukenkastjes op te halen.

Het was druk op de weg. Ik schatte de gemiddelde afstand tussen twee auto's (van achter- tot voorbumper) op veertig meter, terwijl men toch honderd kilometer per uur reed.

Twintig kilometer buiten Amsterdam kwamen we in een file terecht. De gemiddelde afstand tussen twee auto's was nu nog maar één meter, het was stilstaand verkeer. Nu er geen kaart meer viel te lezen, keek ik achterom. Inderdaad stonden daar al heel snel een heleboel auto's.

'We komen zeker hoe langer hoe meer

vooraan in de file te staan?'

'Ja', zei ik, maar ik wist het eigenlijk niet. Alle auto's die ik kon zien, stonden al stil. Even later daalde een onwezenlijke stilte neer over het stuk asfalt. Daar stonden we dan, midden in het weiland. De automobilist achter ons zwaaide me vriendelijk gedag, toch bleef ik nog even kijken.

Ze leek mijn gedachten te raden. 'Als het even druk blijft als daarnet, hoe lang zou het dan duren voordat de file Amsterdam bereikt?'

'Ik geloof dat je moet dan weten hoe lang de gemiddelde Nederlandse auto is.'

'Vierhonderd centimeter. Nou meneer de puzzelmaker, nou?'

Euclides-rekenaars

De oplossing van deze Doordenker kunt u **tot 28 februari a.s.** kwijt in een forum op de website van *Rekenbeter* (www.rekenbeter.nl/Euclides).

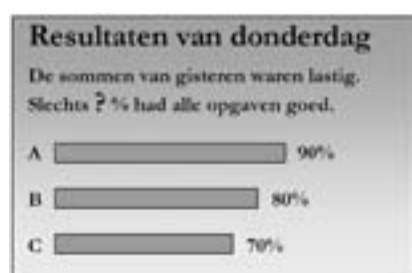
Om op dit forum te komen, meldt u zich aan bij « www.rekenbeter.nl » als lezer van *Euclides*. U komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u een mail met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van deze *Euclides*-rekenaars worden online in een apart klassement bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.

De mooiste oplossingen van Doordenker 1 en 2

Door een ongelukkige samenloop van omstandigheden hadden we helaas te kampen met enkele opstartproblemen bij de nieuwe opzet van de puzzelrubriek. Voor sommige mensen was het niet duidelijk waar precies het forum van de Doordenkers te vinden was. Dit forum is aangemaakt als een blog binnen de site « www.rekenbeter.nl ». Achter de knop Doordenkers verschijnt een link naar de *Euclides Doordenkers*. Daar kunt u uw oplossingen kwijt. Alle oplossingen komen bij elkaar te staan, in volgorde van inleveren. Uit de reacties blijkt dat niet iedereen daar even gelukkig mee is. Toch is dit met opzet gedaan. Bij *Rekenbeter.nl* speelt snelheid van de oplossing een rol. Bovendien kan de beschikbaarheid van een correcte oplossing een uitdaging zijn om een elegantere oplossing te bedenken. Gelukkig hebben genoeg lezers deze plek weten te vinden om een keuze uit de oplossingen te kunnen maken.

Van de ingeleverde oplossingen hebben we in de eerste plaats natuurlijk bekeken of de oplossingen correct zijn. Uit deze oplossingen hebben we de meest elegante dan wel spectaculaire oplossingen gekozen als de beste.

Doordenker 1 (87-1)



Elke dag worden de goedscores op de eerste drie vraagstukken van *Rekenbeter.nl* van de vorige dag weergegeven. Op een bepaalde dag zijn de goedscores: 90% voor opgave A, 80% voor opgave B en 70% voor opgave C. Ook laat het programma zien welk percentage van de deelnemers alle drie opgaven goed had. Welk percentage kan in dit geval op de plaats van het vraagteken staan?

Op deze opgave zijn 7 reacties binnengekomen van 6 verschillende personen. Van deze reacties kunnen er twee als een oplossing worden aangemerkt.

Gerhard Riphagen gaf een half correct antwoord, hoewel de andere helft verscholen zat in zijn uitwerking. *‘Ga voor het gemak eens uit van 100 deelnemers. Daarvan hebben er 90 opgave A goed en 10 fout. Als de 10 deelnemers die vraag A fout hadden, vervolgens op vraag B wel het goede antwoord geven, hebben de andere 70 deelnemers die vraag B goed hebben, ook vraag A goed. Na vraag A en B zijn er dus 70 deelnemers die vraag A en B goed hebben en de 30 anderen hebben al een fout gemaakt. Als nu eens uitgerekend (!) die laatste 30 vraag C wel goed beantwoorden, blijven er nog maar 40 over die in de categorie vallen die vraag A en B al goed hadden en dus alle vragen goed hebben. Er zijn er in dit geval slechts 40% die alle vragen goed hebben.’*

Twee medelezers wezen hem er op dat dit dus een minimum percentage moet zijn, en hij verontschuldigde zich met: *‘Het zou natuurlijk wel verbazing wekken als je als organisatie zou moeten zeggen: “De sommen van gisteren waren lastig, slechts 70% had alle opgaven goed”’*. Daar heeft hij een punt. Dankzij de automatisering is dat echter wel een mogelijke uitkomst.

Doordenker 2 (87-2)

Acht koeien hebben twaalf weken nodig om een wei kaal te vreten. Twaalf koeien hebben er zes weken voor nodig. Hoeveel koeien houden het gras op gemiddeld dezelfde hoogte?

Deze doordenker leverde 14 reacties op van 11 verschillende personen, waaronder helaas vijf vervelende leerlingenreacties. Gerhard Riphagen vond een snel een algebraïsche oplossing als oplossing van twee vergelijkingen met twee onbekenden. Rob leidde het correcte antwoord af uit het bepalen van een evenwichtssituatie van een dynamisch systeem. Maar de eer gaat naar Wobien Doyer. Wobien gaf twee correcte oplossingen. De eerste oplossing is een grafisch oplossing die volledig in woorden is omschreven. Het is niet helemaal duidelijk wat tegen wat wordt uitgezet (weken tegen weken?), maar het resultaat is correct. Heel elegant is de tweede oplossing via een redering met verhoudingen. Deze is hieronder onverkort weergegeven.

‘De hoeveelheid gras die één koe in één week op eet noem ik een portie. 8 koeien hebben na 12 weken $8 \times 12 = 96$ porties gegeten. Dan is het gras op, dus dat is de hoeveelheid gras die er oorspronkelijk was, plus wat er in 12 weken bijgegroeid is. 12 koeien hebben na 6 weken $12 \times 6 = 72$ porties gegeten. Dus is de hoeveelheid gras die er oorspronkelijk was plus wat in 6 weken erbij groeit 72 porties. In de 7e tot en met de 12e week groeiden er dus $96 - 72 = 24$ porties gras bij. In 6 weken groeien er 24 porties bij, dus 4 porties per week. Dus met 4 koeien blijft het gras even hoog.’

**Zebraboekjes**

1. Kattenajds en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehele
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde

22. Spelen en Delen
 23. Experimenteren met kansen
 24. Gravitatie
 25. Blik op Oneindig
 26. Een Koele Blik op Waarheid
 27. Kunst en Wiskunde
 28. Voorspellen met Modellen
 29. Getallenbrouwerij
 30. Passen en Meten met Cirkels
 31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
 32. Experimenteren met rijen
 33. Ontwikkelen met Kettingbreuken
 34. De Ster van de dag gaat op en onder
- Zie verder ook www.nvww.nl/page.php?id=7451 en/of www.epsilon-uitgaven.nl

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Voor overige internet-adressen zie:

www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Forum op de NVvW-site:

www.nvww.nl/forum.html

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (dklingens@gmail.com). Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de lopende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook www.nvww.nl/euclricht.html

jaargang 87

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	27 maart 2012	31 jan 2012
6	15 mei 2012	20 maa 2012
7	26 juni 2012	1 mei 2012

maandag 13 februari, Utrecht

Studiedag: De Grote Rekenmeisjesshow
Organisatie APS

maandag 5 maart, Utrecht

Studiemiddag: Rekenen in het vo getoetst
Organisatie APS

donderdag 8 maart, Utrecht

Onderwijsparade
Organisatie Universiteit Utrecht

zaterdag 10 maart, Mechelen (B)

Jaarvergadering Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars
Organisatie VVWL

woensdag 14 maart, Utrecht

2e Wiskunde C-conferentie
Organisatie cTWO
Zie pag. 146 in dit nummer.

donderdag 15 maart, op de scholen

W4 Kangoeroe (Kangoeroe-wedstrijd)
Organisatie Stichting Wiskunde Kangoeroe

donderdag 29 maart, Zeist

Conferentie: Nationale Rekendag 2012
Organisatie FIsme (Rekenweb)

donderdag 12 april, Eindhoven

48e Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie KWG en TU/e

woensdag 18 april, op de scholen

Grote Rekendag 2012 (De dierenwereld)
Organisatie FIsme (Rekenweb)

donderdag 26 april, Utrecht

NVORWO: jaarvergadering en studiemiddag
Organisatie NVORWO

zaterdag 12 mei, Utrecht

Symposium XVIII
Organisatie HKRWO

za. 30 juni, zo. 1 juli, Blankenberge (B)

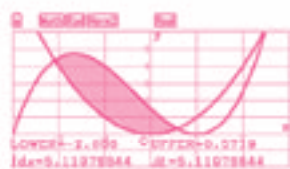
16e Congres Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars
Organisatie VVWL

CASIO fx-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De fx-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De fx-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie 'Picture Plot' waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto's heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De fx-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

Bekijk het in kleur op
www.casio-educatie.nl



3 jaar
garantie

CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De fx-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.



CASIO fx-9860GII

Rekengemak:
de grafische rekenmachine fx-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.



CASIO fx-82ES PLUS

Geniale oplossing:
de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine fx-82ES Plus met natuurlijke invoer en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

Bestel nu uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de
Casio rekenmachines via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl

De Moderne Wiskundedag 2012: Een **inspirerende** **dag**, daar kunt u op **rekenen!**



Noordhoff Uitgevers

Moderne Wiskundedag 2012

Donderdag
8 maart 2012
ReeHorst te Ede

Met onder andere werkgroepen over:

- Referentiekader rekenen
- Digitaal schoolbord
- Tussendoelen en tussentoets
- Wiskunde Olympiade
- Moderne Wiskunde 10 hv ob
- Lesgeven met de I-pad
- Moderne Wiskunde 10 TF
- Spel(l)en in de wiskundeles
- GeoGebra
- 'De granaatappel'

Werkt u nog niet met Moderne Wiskunde? Kom dan kennismaken. U bent van harte welkom!

Kijk voor meer informatie en het aanmelden op
www.modernewiskundedag.nl.

**MODERNE
WISKUNDE**

Noordhoff Uitgevers werkt voor de docent